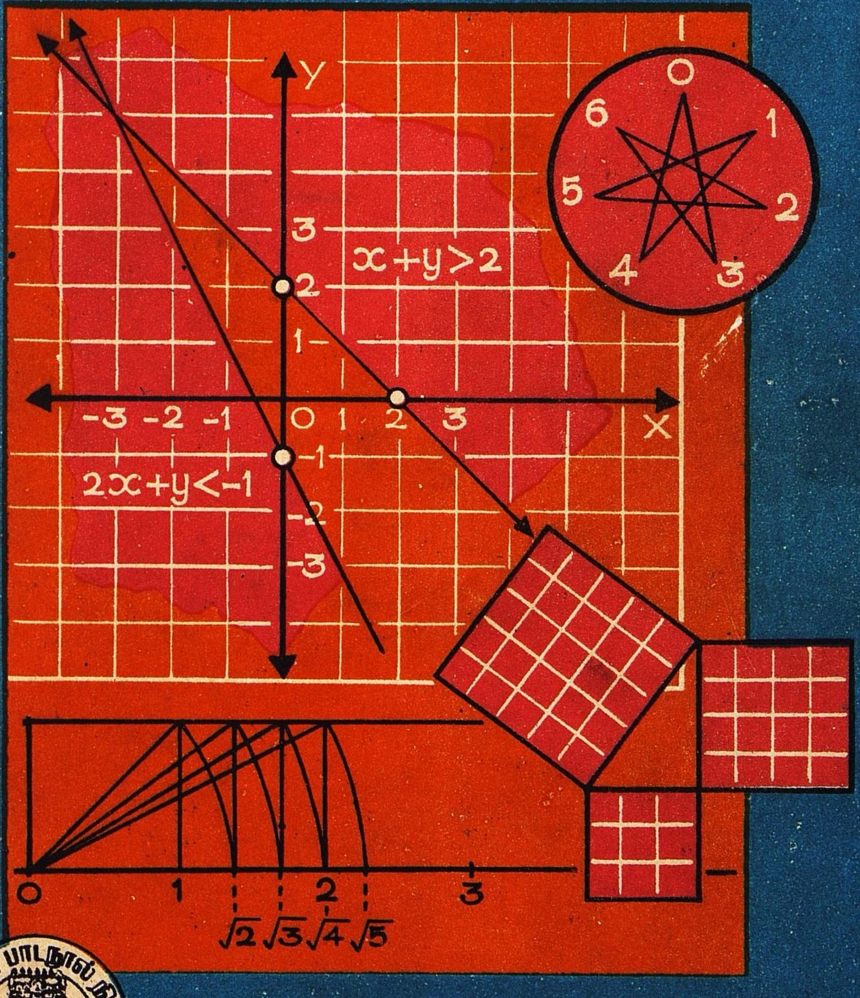
கணக்கு 9



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

கணக்கு

ஒன்பதாம் வகுப்பு

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்
சென்னை

© தமிழ்நாட்டு அரசு

திருத்திய பதிப்பு — 1977
மறுபதிப்பு—1978

பள்ளிக் கல்வி இயக்குநர், மாநிலக் கல்வி ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவன இயக்குநர் ஆகியோர் அமைத்த வல்லுநர் குழுக்களால் திருத்தி அமைக்கப்பட்டது.

விலை : ரூ. 5-00

இந்திய அரசு சலுகை விலையில் வழங்கிய 60 ஜி. எஸ். எம். தாளில் இந் நூல் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :
ஏஷியன் அச்சகம், சென்னை-600014.

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
1.	கணங்கள், உறவுகள், சார்புகள்	...	1
2.	தருக்க முறை	...	29
3.	எண்மான முறையினங்கள்	...	36
4.	மெய்யெண் கணம்	...	59
5.	கணக்கீடு	...	83
6.	தொடக்க எண்ணியல்	...	103
7.	கணித வாக்கியங்கள்	...	123
8.	ஒருபடி சமன்பாடுகளும், சமனிலிகளும்	...	131
9.	பல்லுறுப்புக் கோவைகள்	...	155
10.	பயனியல் பகுதி	...	233
11.	புள்ளியியல்	...	256
12.	அளவியல்		
	A. முக்கோணப் பகுதிகள்	...	279
	B. வட்டகோணப் பகுதிகள்	...	284
	கோணங்கள்	...	298
	சோதனைத்தாள் (அளவியல்)	...	300
13.	வடிவியல்		
	I. மீள்பார்வை	...	302
	II. சர்வசமம்	...	317
	III. முக்கோணங்கள்	...	323
	IV. சமனிலிகள்	...	331
	V. இணைகோடுகள்	...	340
	VI. மறுபடியும் முக்கோணங்கள்	...	350

எண்			பக்கம்
VII.	இணைகரங்கள்	...	356
VIII.	இரு முக்கியத் தேற்றங்கள்	...	361
IX.	நியமப் பாதைகள்	...	365
X.	ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்	...	367
XI.	பரப்பளவு	...	372
XII.	செய்முறை வடிவியல்	...	385
14.	வரை படங்கள்		
	பகுதி I	...	397
	பகுதி II	...	402
	பகுதி III	...	405
	விடைகள்	...	408

[மாணவர்கள், அத்தியாயம் 13-ல் * குறியிட்ட தேற்றங்களுக்கு மட்டும் அறிவியல் முறையில் நிருபணம் தரப் பயில வேண்டும். (மற்ற தேற்றங்களை எளிய கணக்குகளாகக் கருதிச் செய்தல்—அல்லது செய்முறையில் சரிபார்த்தல்—போன்ற முறைகளில் பயின்றால் போதுமானது.) மேலும், இந்த அத்தியாயத்தில் XII ஆம் பகுதியிலுள்ள வரைமுறைகளனைத்துக்கும் நிருபணம் தரப் பயில வேண்டும்.]

---

1. கணங்கள், உறவுகள், சார்புகள்

§ 1. கணங்களில் அடிப்படைச் செயல்கள்

கணங்களைப் பற்றி முன் வகுப்புகளில் கற்றுக் கொண்டதை மீண்டும் சுருக்கமாக நினைவு படுத்திக் கொள்வோம்.

வரையறை 1 :

கணம் A-ல் உள்ள அல்லது கணம் B-ல் உள்ள (அல்லது இரண்டிலுமுள்ள) உறுப்புகள் எல்லாவற்றையும் கொண்ட கணத்தை A, B இவற்றின் சேர்ப்புக் கணம் என்போம். இதை $A \cup B$ என்று குறிப்போம்.

$$A \cup B = \{ x / x \in A \text{ அல்லது } x \in B \}$$

வரையறை 2 :

கணம் A-யிலும் கணம் B-யிலும் பொதுவாக உள்ள உறுப்புகளனைத்தையும் கொண்ட கணத்திற்கு A, B இவற்றின் வெட்டுக் கணம் என்போம். இதை $A \cap B$ எனக் குறிப்போம்.

$$A \cap B = \{ x / x \in A, \text{ மேலும் } x \in B \}$$

வரையறை 3 :

ஒரு கணத்தின் உட்கணங்கள் அனைத்தையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட புதிய கணத்தை முதலில் எடுத்துக் கொண்ட கணத்தின் அடுக்குக் கணம் என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$A = \{ a, r, k \}$ என்றால்,

$$P(A) = \Big\{ \{a, r, k\}, \{a, r\}, \{a, k\}, \{r, k\}, \{a\}, \{r\}, \{k\}, \{\ \} \Big\}$$

அடைவுப் பண்பு :

$P(A)$-ன் எந்த இரண்டு உறுப்புகளை எடுத்துக் கொண்டு அவற்றின் சேர்ப்புக் கணம் அமைத்தாலும், அது $P(A)$-ன் உறுப்பாக அமைவதைப் பார்க்கலாம். எனவே,

கணம் A-ன் அடுக்குக் கணமான $P(A)$ சேர்ப்புக் கணம் அமைத்தல் என்ற செயலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளது.

அடுத்து, **கணம் A-ன் அடுக்குக் கணமான $P(A)$ வெட்டுக் கணம் அமைத்தல் என்ற செயலைப் பொறுத்தும் அடைவு பெற்றுள்ளது** என்பதைப் பல எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

மாற்றுப் பண்பு :

$A = \{a, r, k\}$, $B = \{r, a, g, u\}$ என்க.

$A \cup B = \{a, r, k, g, u\}$

$B \cup A = \{r, a, g, u, k\}$

$A \cup B = B \cup A$ என்பதைக் காண்க.

A-ல் உள்ள அல்லது B-ல் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தையும் கொண்ட கணம் $A \cup B$ ஆகும். B-ல் உள்ள அல்லது A-ல் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தையும் கொண்ட கணம் $B \cup A$ ஆகுமல்லவா? $A \cup B$-ம், $B \cup A$-ம் ஒரே கணத்தைக் குறிக்கின்றன என்று எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம். ஆகவே, **சேர்ப்புக் கணம் அமைத்தல் என்ற செயல் மாற்றுப் பண்பு பெற்றுள்ளது.**

A-க்கும் B-க்கும் பொதுவான உறுப்புகள் அனைத்தையும் கொண்ட கணத்தையே, B-க்கும் A-க்கும் பொதுவான உறுப்புகள் அனைத்தையும் கொண்ட கணம் என்று கூறலாம் அல்லவா?

$A \cap B = \{x / x \in A,$ மேலும் $x \in B\}$

$B \cap A = \{x / x \in B,$ மேலும் $x \in A\}$

எனவே, $A \cap B = B \cap A$.

வெட்டுக் கணம் அமைத்தல் என்ற செயலும் மாற்றுப் பண்பு பெற்றுள்ளது.

தொடர்புப் பண்பு:

$$(A \cup B) \cup C = \{x/x \in A \text{ அல்லது } x \in B\} \cup \{x/x \in C\}$$

$$= \{x/x \in A \text{ அல்லது } x \in B \text{ அல்லது } x \in C\} \quad \dots (I)$$

$$A \cup (B \cup C) = \{x/x \in A\} \cup \{x/x \in B \text{ அல்லது } x \in C\}$$

$$= \{x/x \in A \text{ அல்லது } x \in B \text{ அல்லது } x \in C\} \quad \dots (II)$$

(I), (II) இவற்றை ஒப்பிட,

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ என அறிந்து கொள்ளலாம்.

அடுத்ததாக,

$$(A \cap B) \cap C = \{x/x \in A \text{ மேலும் } x \in B\} \cap \{x/x \in C\}$$

$$= \{x/x \in A \text{ மேலும் } x \in B \text{ மேலும் } x \in C\} \quad \dots (I)$$

$$A \cap (B \cap C) = \{x/x \in A\} \cap \{x/x \in B \text{ மேலும் } x \in C\}$$

$$= \{x/x \in A \text{ மேலும் } x \in B \text{ மேலும் } x \in C\} \quad \dots (II)$$

(I), (II) இவற்றை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ எனத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

சேர்ப்புக் கணம் அமைத்தல் என்ற செயல் தொடர்புப் பண்பு பெற்றுள்ளது; வெட்டுக் கணம் அமைத்தல் என்ற செயலும் தொடர்புப் பண்பு பெற்றுள்ளது.

அனைத்துக் கணம் — வெற்றுக் கணம்

அனைத்துக் கணம் என்றால் என்ன என்றும், வெற்றுக் கணம் என்றால் என்ன என்றும் முன் வகுப்புகளிலேயே படித்திருக்கிறீர்கள். அனைத்துக் கணத்தை ε என்றும், வெற்றுக் கணத்தை ϕ என்றும் குறிப்போம்.

இரு எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ என்க.

$$A \cup \varepsilon = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \varepsilon.$$

$$A \cap \varepsilon = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$= \{2, 4, 6, 8\} = A.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ என்க.

$$A \cup \phi = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{\ \} = \{2, 4, 6, 8\} = A$$
$$A \cap \phi = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{\ \} = \{\ \} = \phi.$$

இவை போன்ற பல எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் பின் வரும் நான்கு கூற்றுகளும் மெய்யானவை எனத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

A என்பது எந்த ஒரு கணமாக இருப்பினும்,

(i) $A \cup \varepsilon = \varepsilon$

(ii) $A \cap \varepsilon = A$

(iii) $A \cup \phi = A$

(iv) $A \cap \phi = \phi$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ என்க.

$$\varepsilon \cup \varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5\} = \varepsilon$$

$$\varepsilon \cap \varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5\} = \varepsilon$$

$$\varepsilon \cup \phi = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{\ \}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5\} = \varepsilon$$

$$\varepsilon \cap \phi = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{\ \} = \{\ \} = \phi$$

இவை போல பல எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் கீழ்வரும் நான்கு கூற்றுகளும் மெய்யானவை எனத் தெரிந்துகொள்ளலாம்.

(i) $\varepsilon \cup \varepsilon = \varepsilon$

(ii) $\varepsilon \cap \varepsilon = \varepsilon$

(iii) $\varepsilon \cup \phi = \varepsilon$

(iv) $\varepsilon \cap \phi = \phi$.

[குறிப்பு : எடுத்துக்காட்டு 2-ன் கீழ் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நான்கு கூற்றுகளிலும், A என்பதற்குப் பதிலாக ε என்பதைப் பிரதியிட, மேலுள்ள நான்கு கூற்றுகளும் கிடைப்பதைக் கவனி.]

எடுத்துக்காட்டு 2-ன் கீழ் கொடுக்கப்பட்டுள்ள (iii) ஆவது (iv) ஆவது கூற்றுகளில் A-க்குப் பதிலாக ϕ பிரதியிட,

$\phi \cup \phi = \phi$ என்பதும்,

$\phi \cap \phi = \phi$ என்பதும் விளங்கும்.

பயிற்சி 1·1

(1) $A = \{ a, b \}$ என்றால், $P(A)$-ன் உறுப்புகளனைத்தையும் பட்டியல் படுத்துக.

(2) $B = \Big\{ \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \ \{ \ \} \Big\}$ என்றால். B சேர்ப்புக்கணம் அமைத்தலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளதா? வெட்டுக்கணம் அமைத்தலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளதா?

(3) $C = \Big\{ \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \Big\}$ என்றால், C சேர்ப்புக் கணம் அமைத்தலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளதா? வெட்டுக் கணம் அமைத்தலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளதா?

(4) $D = \Big\{ \{ a \}, \{ b \}, \{ \ \} \Big\}$ எனில், D சேர்ப்புக் கணம் அமைத்தலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளதா? வெட்டுக் கணம் அமைத்தலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளதா?

(5) $E = \Big\{ \{ 1, 2 \}, \{ 3 \}, \{ 1, 2, 3 \}, \{ 3, 4 \} \Big\}$ என்றால், E சேர்ப்புக் கணம் அமைத்தலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளதா? வெட்டுக்கணம் அமைத்தலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளதா?

(6) $n(A) = 3$ என்றால், $n\big(P(A)\big)$ என்ன?

(7) $A = \{ b, t, s \}$, $B = \{ b, t \}$, $C = \{ b, s \}$,
$D = \{ t, s \}$, $E = \{ b \}$, $F = \{ t \}$, $G = \{ s \}$,
$H = \{ \ \}$

கீழுள்ள சட்டங்களைப் போல் நகல் எடுத்து அதில் உள்ள கட்டங்களில்,

$P(A) = X = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$-ன் சரியான உறுப்பை இட்டு நிரப்புக.

∪	A	B	C	D	E	F	G	H
A								
B								
C				A				
D								
E						B		
F								
G								
H								

∩	A	B	C	D	E	F	G	H
A								
B								
C				G				
D								
E						H		
F								
G								
H								

§ 2. எளிய முற்றொருமைகள் — வென் படங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$A = \{1, 2, 3\}$ என்க.

$A \cup A = \{1, 2, 3,\} \cup \{1, 2, 3\}$

$= \{1, 2, 3\}$

$= A.$

A என்பது எந்த ஒரு கணமாயினும், $A \cup A = A.$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$A = \{a, c, e\}$ என்க.

$A \cap A = \{a, c, e\} \cap \{a, c, e\}$

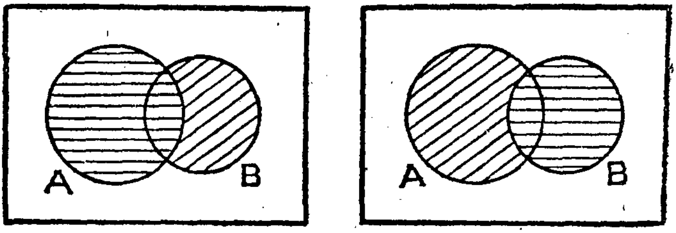
$= \{a, c, e\}$

$= A.$

A என்பது எந்த ஒரு கணமாயினும், $A \cap A = A.$

கீழ்வரும் வென் படங்களைக் கவனி.

I.



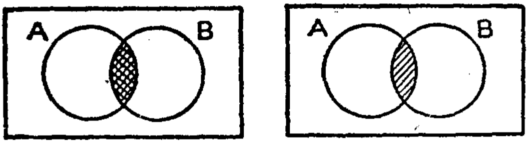
AUB (1) BUA (2)

படம் 1·1.

இவ்விரு படங்களிலிருந்து $A \cup B = B \cup A$ என்பது தெளிவாகிறது.

II.

(1)



(2)

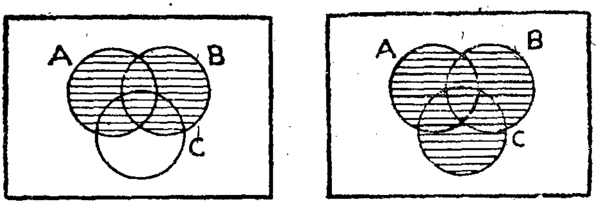
A∩B B∩A

படம் 1·2.

இவ்விரு படங்களிலிருந்து, $A \cap B = B \cap A$ என்பது தெளிவாகும்.

III.

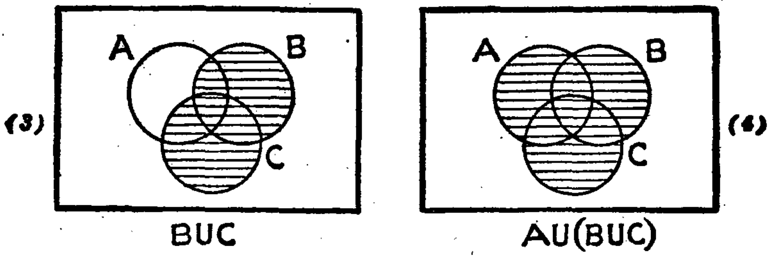
(1)



(2)

AUB (AUB)UC

படம் 1·3 (a).

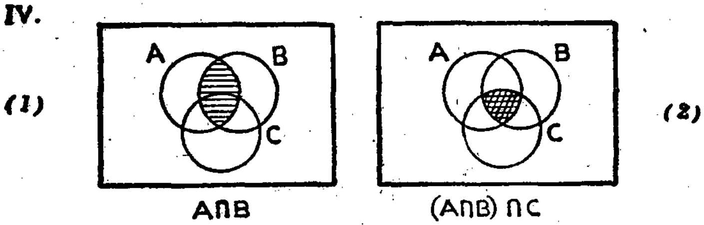


படம் 1·3 (b)

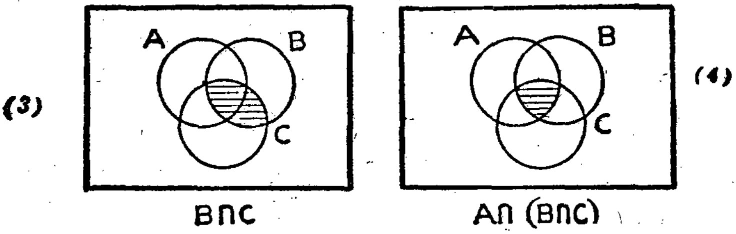
படம் (2), படம் (4) இவற்றை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க,

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ என்பது தெளிவாகும்.

IV.



படம் 1·4 (a).



படம் 1·4 (b).

படம் (2), படம் (4) இவற்றை ஒப்பு நோக்க,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ என்பது புலனாகும்.வாகும்,

இதுவரை பார்த்தவை கீழே தொகுத்துக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

1. (a) $A \cup A = A$ 1. (b) $A \cap A = A$

2. (a) $A \cup B = B \cup A$ 2. (b) $A \cap B = B \cap A$

3. (a) $A \cup \varepsilon = \varepsilon$ 3. (b) $A \cap \varepsilon = A$

4. (a) $A \cup \phi = A$ 4. (b) $A \cap \phi = \phi$

5. (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 5. (b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

6. (a) $\varepsilon \cup \varepsilon = \varepsilon$ 6. (b) $\varepsilon \cap \varepsilon = \varepsilon$

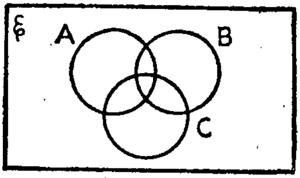
7. (a) $\phi \cup \phi = \phi$ 7. (b) $\phi \cap \phi = \phi$

8. (a) $\varepsilon \cup \phi = \varepsilon$ 8. (b) $\varepsilon \cap \phi = \phi$

[குறிப்பு : 1 (a), 6 (a), 7 (a) இவற்றின் அடிப்படை அமைப்புகளை ஒப்பு நோக்குக. 1 (b), 6 (b), 7 (b), இவற்றையும் நோக்குக.]

பயிற்சி 1·2

(1) பக்கத்தில் கொடுத்துள்ளதைப் போல் வென் படங்கள் வரைந்து கொண்டு, அவற்றில் பின் வருவனவற்றை நிழலிட்டுக் காட்டுக.



படம் 1-5.

(i) $(A \cup B) \cup C$ (ii) $A \cup (B \cup C)$

(iii) $(A \cap B) \cap C$ (iv) $A \cap (B \cap C)$

(v) $(A \cup B) \cap C$ (vi) $A \cup (B \cap C)$

(vii) $(A \cap B) \cup C$ (viii) $A \cap (B \cup C)$

(ix) $\varepsilon \cap (A \cup B)$ (x) $\varepsilon \cap (A \cap B)$

(2) நீ வரைந்த வென் படங்களின் உதவி கொண்டு பின் வருவனவற்றுள் எவையெவை மெய்யான கூற்றுகள் எனக் கூறுக.

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(iii) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

(iv) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

(v) $\varepsilon \cap (A \cup B) = A \cup B$

(vi) $\varepsilon \cap (A \cap C) = A \cap C$.

§ 3. ஆதி எண் — ஒரு சூத்திரம்

ஒரு கணத்தின் ஆதி எண் என்றால் அக் கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை என்றும், A என்ற கணத்தின் ஆதி எண் என்பதை $n(A)$ என்று குறிப்போம் என்றும் முன் வகுப்புகளிலேயே படித்திருப்பீர்கள். எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{2, 3, 5, 8\}$ எனில், $n(A) = 4$.

வென் படங்களின் உதவி கொண்டு, சில வகையான கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பது எப்படி எனப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களில் கணிதத்தில் தேறியவர்களின் எண்ணிக்கை 36. விஞ்ஞானத்தில் தேறியவர்களின் எண்ணிக்கை 32. இரண்டிலும் தேறியவர்களின் எண்ணிக்கை 28 எனில், ஒன்றிலாவது தேறிய மாணவர்களின் எண்ணிக்கை என்ன ?

தீர்வு :

A என்பது கணிதத்தில் தேறியவர்கள் கணத்தையும்,

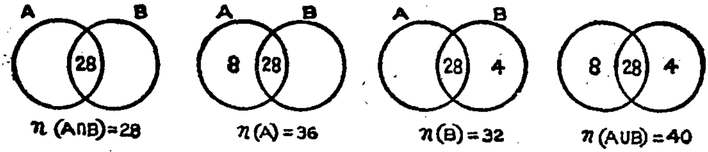
B என்பது விஞ்ஞானத்தில் தேறியவர்கள் கணத்தையும் குறிக்கட்டும்.

அப்பொழுது,

$A \cap B$ என்பது இரண்டிலும் தேறியவர்களின் கணத்தையும்,

$A \cup B$ என்பது ஒன்றிலாவது தேறியவர்களின் கணத்தையும் குறிக்கும்.

பின் வரும் படங்களைப்பார்.



படம் 1-6

ஒரு பாடத்திலாவது தேறிய மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 40$.

மேலுள்ள படங்களிலிருந்து

$n(A \cup B) = 40$, $n(A) = 36$, $n(B) = 32$, $n(A \cap B) = 28$ என்பதால்,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

என்பது புலப்படும். இம் மாதிரியே பல எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் A, B என்பன ஏதேனும் இரு கணங்கள் எனில்

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

என்று அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

மாணவர் விடுதி ஒன்றில் 48 பேர்கள் உள்ளனர். அனைவரும் ஆங்கிலச் செய்தித்தாளோ அல்லது தமிழ்ச் செய்தித்தாளோ (அல்லது இரண்டுமோ) படிப்பவர்கள். ஆங்கிலச் செய்தித்தாள் படிப்பவர்கள் 20 பேர்கள். ஆங்கிலச் செய்தித்தாளும், தமிழ்ச் செய்தித்தாளும் படிப்பவர்கள் 5 பேர்கள். தமிழ்ச் செய்தித் தாள் படிப்பவர்கள் எத்தனை பேர்கள் ?

தீர்வு :

A = { ஆங்கிலச் செய்தித்தாள் படிப்பவர்கள் }

B = { தமிழ்ச் செய்தித்தாள் படிப்பவர்கள் } என்க.

அப்பொழுது,

$A \cup B$ = { விடுதியில் உள்ள மாணவர்கள் }

$A \cap B$ = { ஆங்கிலச் செய்தித்தாளும், தமிழ்ச் செய்தித்தாளும் படிப்பவர்கள் }.

கணக்கின்படி,

$n(A) = 20, \quad n(A \cap B) = 5, \quad n(A \cup B) = 48$

$n(B) = ?$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$48 = 20 + n(B) - 5$$

$$\therefore \quad n(B) = 48 - 15 = 33.$$

எனவே தமிழ்ச் செய்தித்தாள் படிப்பவர்கள் எண்ணிக்கை 33

[குறிப்பு : வென் படம் வரைந்து விடையைச் சரிபார்.]

பயிற்சி 1·3

(1) ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவிகளுக்குப் பாடவோ அல்லது ஆடவோ (அல்லது பாடவும் ஆடவுமோ) தெரியும். 20 மாணவிகளுக்குப் பாடத் தெரியும். 15 மாணவிகளுக்கு ஆடத் தெரியும். பாடவும் ஆடவும் தெரிந்த மாணவிகளின் எண்ணிக்கை 8 என்றால், வகுப்பில் உள்ள மாணவிகளின் எண்ணிக்கை என்ன ? வென் படம் ஒன்று வரைந்து இவ் விவரங்களைக் குறித்துக் காட்டுக.

(2) ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களுக்கும் பூப்பந்தாட்டமோ அல்லது கால் பந்தாட்டமோ (அல்லது இரண்டுமோ) ஆடத் தெரியும். 22 பேர்கள் பூப்பந்தாட்டமும், 18 பேர்கள் கால் பந்தாட்டமும் விளையாடும் திறமை பெற்றவர்கள். வகுப்பில் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை 31 என்றால், இரு விளையாட்டுகளிலும் திறமை பெற்றவர்கள் எத்தனை பேர் எனக் கண்டுபிடி.

(3) புள்ளி விவரம் எடுத்ததில், எழுதப் படிக்கத் தெரிந்தவர்களிடையே 93 சதவீதம் மக்கள் வலக்கையினால் எழுத முடியும் என்றும், 2 சதவீதம் மக்கள் இரண்டு கைகளினாலும் எழுத முடியும் என்றும் கண்டறியப்பட்டது. இடக் கையினால் எழுதத் தெரிந்தவர்கள் சதவீதம் என்ன ?

(4) $A \neq B$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ என்றால் A, B என்ற இரு கணங்களைப் பற்றி என்ன கூற இயலும் ?

(5) $n(A \cup B) = n(A)$ என்றால், $n(B) = n(A \cap B)$ என்று காட்டுக.

§4. கார்டீசியன் பெருக்கல் பலன்

சோடிகளைப் பற்றியும், வரிசைச் சோடிகளைப் பற்றியும், கார்டீசியன் பெருக்கல் பலன்களைப் பற்றியும் முன் வகுப்பில் படித்தவற்றை மீண்டும் நினைவு படுத்திக் கொள்க.

$$A = \{ l, m \}, \quad B = \{ 1, 2, 3 \} \text{ என்க.}$$

$A \times B = \{ (l, 1), (l, 2), (l, 3), (m, 1), (m, 2), (m, 3) \}$ ஆகும்.

வரையறை :

A, B என்ற இரு கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல் பலன், $A \times B$ என்பது, A-ல் உள்ள உறுப்புகளை முன்னுறுப்பாகவும், B-ல் உள்ள உறுப்புகளைப் பின் உறுப்பாகவும் கொண்ட எல்லா வரிசைச் சோடிகளையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணமாகும்.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

முதல் பத்தியில் கூறியுள்ள A, B என்ற இரு கணங்களையே எடுத்துக் கொண்டால்,

$B \times A = \{ (1, l), (1, m), (2, l), (2, m), (3, l), (3, m) \}$ ஆகும்.

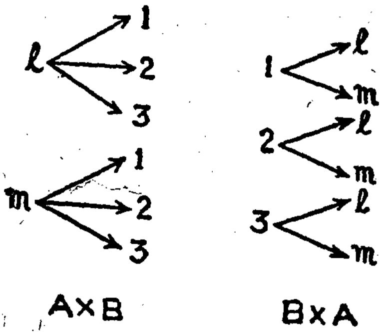
$(l, 1)$ என்ற வரிசைச் சோடியும், $(1, l)$ என்ற வரிசைச் சோடியும் வெவ்வேறானவை என உங்களுக்குத் தெரியுமல்லவா ? எனவே, A-ம், B-ம் வெவ்வேறான கணங்கள் எனில், $A \times B$-ம் $B \times A$-ம் வெவ்வேறான கணங்களாகும்.

$$A \neq B \text{ எனில், } A \times B \neq B \times A.$$

இரு கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல் பலன் கண்டு பிடித்தல் என்ற செயலிற்கு மாற்றுப் பண்பு கிடையாது.

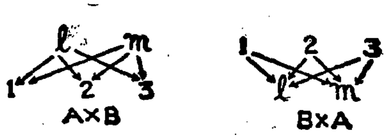
கார்டீசியன் பெருக்கல் பலன்களை விளக்கும் சில வகையான வரைபடங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வகை 1 :



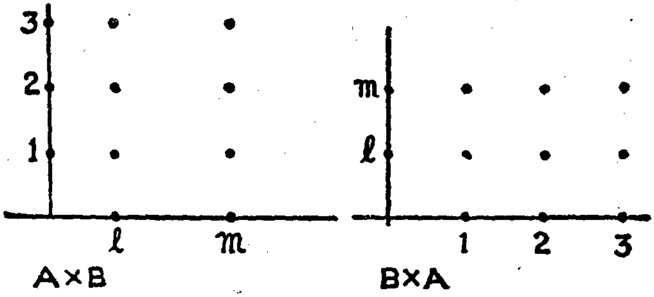
படம் 1-7 (a).

வகை 2 :



படம் 1-7 (b).

வகை 3 :



படம் 1-8.

[குறிப்பு : ஒவ்வொரு வகையிலும், $A \times B$-ன் வரைபடமும், $B \times A$-ன் வரைபடமும் மாறுபட்டிருப்பதைக் கவனி.]

இரண்டுக்கு மேற்பட்ட கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல் பலன்

$A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{x, y\}$ என்க.

$$A \times B = \{1, 2\} \times \{3, 4\}$$
$$= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}.$$

$$(A \times B) \times C = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\} \times \{x, y\}$$
$$= \{[(1, 3), x], [(1, 3), y], [(1, 4), x], [(1, 4), y], [(2, 3), x], [(2, 3), y], [(2, 4), x], [(2, 4), y]\}$$

$[(1, 3), x]$ என்பதற்கு 'முதலில் 1, பிறகு 3, பிறகு x என்றுதானே பொருள்? ஆகவே, இதனை $(1, 3, x)$ என்றே எழுதலாமே! எனவே,

$$(A \times B) \times C = \{(1, 3, x), (1, 3, y), (1, 4, x), (1, 4, y), (2, 3, x), (2, 3, y), (2, 4, x), (2, 4, y)\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (I)$$

இவ்வாறே,

$$B \times C = \{3, 4\} \times \{x, y\}$$
$$= \{(3, x), (3, y), (4, x), (4, y)\}$$ என்பதால்

$$A \times (B \times C) = \{1, 2\} \times \{(3, x), (3, y), (4, x), (4, y)\}$$
$$= \{[1, (3, x)], [1, (3, y)], [1, (4, x)], [1, (4, y)], [2, (3, x)], [2, (3, y)], [2, (4, x)], [2, (4, y)]\}$$
$$= \{(1, 3, x), (1, 3, y), (1, 4, x), (1, 4, y), (2, 3, x), (2, 3, y), (2, 4, x), (2, 4, y)\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (II)$$

(I) (II) இவற்றை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க,

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

என்பது விளங்கும்.

பயிற்சி 1·4

(1) $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$, $C = \{e, f, g\}$ என்றால், பின் வருவனவற்றைக் கணிக்க

(i) $A \times B$ (ii) $B \times A$ (iii) $A \times C$

(iv) $C \times A$ (v) $B \times C$ (vi) $C \times B$

(vii) $n(A \times B)$ (viii) $n(B \times A)$.

(2) A, B, C என்பன முதல் கேள்வியில் கொடுக்கப் பட்டுள்ள கணங்கள் எனில், பின் வருவனவற்றுள் எவையெவை மெய்யான கூற்றுகள்?

(i) $A \times B = B \times A$

(ii) $n(A \times B) = n(B \times A)$

(iii) $B \times C = C \times B$

(iv) $n(B \times C) = n(C \times B)$.

(3) $n(A) = 3$, $n(B) = 4$, $n(C) = 5$ எனில், பின் பின் வருவனவற்றைக் கண்டுபிடி.

(i) $n(A \times B)$ (ii) $n(A \times C)$ (iii) $n(B \times C)$

(iv) $n(A \times A)$ (v) $n(B \times B)$ (vi) $n(C \times C)$

(4) $A \times B$, எப்பொழுது $B \times A$-க்குச் சமமாக இருக்கும்?

(5) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ என்றால்,

$A \times B$, $B \times A$ இவற்றை விளக்கும்

(i) அம்புக்குறி படங்களை,

(ii) வரை படங்களை, வரைக.

(6) $A = \{x\}$, $B = \{y\}$, $C = \{z\}$ எனில்,

பின் வருவனவற்றைக் கணிக்க :

(i) $(A \times B) \times C$ (ii) $A \times (B \times C)$

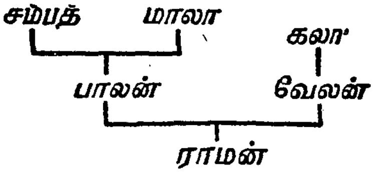
(iii) $n((B \times A) \times C)$ (iv) $n((C \times (B \times A))$

(v) $A \times (C \times B)$

இவற்றில் சம கணங்கள் யாவை? சமமில்லா இரு கணங்கள் (இவற்றில் இருந்தால்) சுட்டிக் காட்டுக.

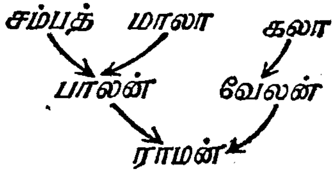
§ 5.1 உறவுகள்

கீழே கொடுத்துள்ளதைப் போன்ற வம்ச பரம்பரைப் படங்கள் பார்த்திருப்பீர்கள்.



படம் 1-9 (*a*).

மேலுள்ள படத்தையே பின்வருமாறும் குறிக்கலாம்.



படம் 1-9 (*b*).

இப் படம் '—ன் தந்தை–' என்ற உறவினைக் காட்டுகிறது. உறவுகளைக் குறிக்கும் இம்மாதிரியான படங்களுக்கு அம்புக்குறிப் படங்கள் என்று பெயர்.

மேலுள்ள அம்புக்குறிப் படத்தில் உள்ள விவரங்களையும் 'உறவினை'யும் நாம் வரிசைச் சோடிகளின் கணமாகக் கீழுள்ளவாறு எழுதலாம்.

{(பாலன், ராமன்), (வேலன், ராமன்), (சம்பத், பாலன்), (மாலா, பாலன்), (கலா, வேலன்)}.

இக் கணத்தின் உறுப்புகளான வரிசைச் சோடிகள் ஒவ்வொன்றிலும் பின்னுறுப்பு, முன்னுறுப்புடன் '—ன் தந்தை–' என்ற உறவில் தொடர்பு கொண்டுள்ளது.

பாலனி '—ன் தந்தை–' ராமன் என்பதைச் சுருக்கமாக நாம், பாலன் ⟶ ராமன் என்று குறிக்கலாம். கலா ⟶ வேலன் என்று குறித்தால் கலாவி '—ன் தந்தை–' வேலன் என்று பொருள் படும்.

அண்ணன், மகன், கணவன் போன்ற உறவுகளை மாத்திர மல்லாமல், கணிதத்தில் பயன்படும் 'பெரியது,' 'சிறியது,' '—ன் காரணி,—' '—ன் மடங்கு,—' '—ன் வர்க்கம்,—' 'இணையானது,' 'செங்குத்தானது'...இன்னும் இவை போன்ற உறவுகளைக் கூட அம்புக்குறிப் படங்களால் குறிக்க முடியும். எடுத்துக்காட்டாக { 4, 6, 8, 12, 16 } என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதில்,

"16-ன் காரணி 8"

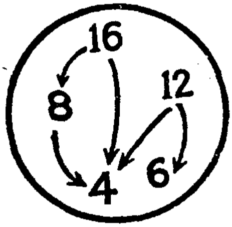
"16-ன் காரணி 4"

"12-ன் காரணி 6"

"12-ன் காரணி 4"

"8-ன் காரணி 4"

என்ற ஐந்து விவரங்களையும் பின்வரும் அம்புக்குறிப் படத்தால் குறிக்கலாம்.



படம் 1-10.

இதே ஐந்து விவரங்களையும் '-ன் காரணி' என்ற உறவினையும் (R) நாம் வரிசைச் சோடிகளின் கணமாகக் குறிக்கலாம்.

$R = \{(16, 8), (16, 4), (12, 6), (12, 4), (8, 4)\}$

'R' என்பது '-ன் காரணி' என்ற உறவினைக் குறித்தால், 16-ன் காரணி 8 என்பதை 16 R 8 என்றும், 16-ன் காரணி 6 அல்ல என்பதை 16 $\not R$ 6 என்றும் குறிப்போம்.

இங்கு ஒவ்வொரு வரிசைச் சோடியிலும் பின்னுறுப்பு, முன்னுறுப்பின் காரணியாகும்.

முன்னுறுப்புகளின் கணத்தை (அம்புக்குறிப் படத்தில் எங்கிருந்தெல்லாம் அம்புக்குறிகள் புறப்படுகின்றனவோ அவற்றின் கணத்தை) உறவின் மதிப்பகம் (Domain of the relation) என்றும், பின்னுறுப்புகளின் கணத்தை (எங்கெல்லாம் அம்புக் குறிகள் சென்றடைகின்றனவோ அவற்றின் கணத்தை) உறவின் வீச்சகம் (range of the relation) என்றும் கூறுவோம்.

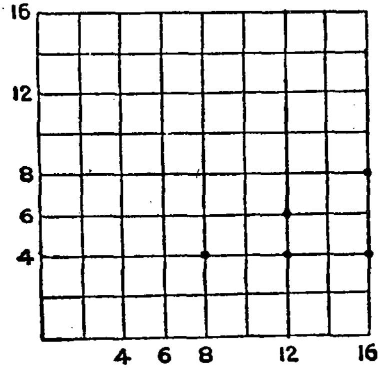
மேலுள்ள எடுத்துக்காட்டில் $\{16, 12, 8\}$ '—ன் காரணி' என்ற உறவின் மதிப்பகம் ஆகும்; $\{8, 6, 4\}$ உறவின் வீச்சகம் ஆகும். வீச்சகத்தை உட்கணமாகக் கொண்ட எந்த ஒரு கணத்தையும் அவ்வுறவின் துணை மதிப்பகம் (codomain of the relation) என்போம்.

பொதுவாக, a, b உடன் R என்ற உறவிருந்தால் aRb என்றும், a-க்கும் b-க்கும் R என்ற உறவு இல்லையெனில் $a \not{R} b$ என்றும் குறிப்பது வழக்கம்.

aRb என்றால் $(a, b) \in R$ ஆகும்.

$c \not{R} d$ என்றால் $(c, d) \notin R$ ஆகும்.

கார்ட்டீசியன் பெருக்கற் பலனுக்கு வரைபடம் வரைந்தது போலவே, உறவுகளுக்கும் வரைபடம் வரையலாம். மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டின் வரைபடம் அடியில் தரப்பட்டுள்ளது.



படம் 1-11.

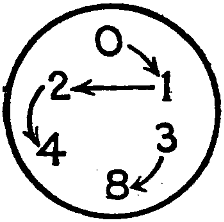
பயிற்சி 1·5

(1) கீழுள்ளவற்றை இருவகையில் குறியீட்டு மொழியில் எழுதுக.

(i) m, n உடன் R என்ற உறவில் தொடர்பு கொண்டுள்ளது

(ii) x-க்கும் y-க்கும் R என்ற உறவு இல்லை.

(2) கீழுள்ள அம்புக்குறிப் படம் காட்டும் உறவினை வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக எழுதுக.



படம் 1-12.

(3) $R = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ இவ்வுறவினைக் காட்ட ஓர் அம்புக்குறிப் படம் வரைக.

(4) எண்களின் கணமொன்றில் ஓர் உறவு R வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக கீழுள்ளவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$R = \{(2, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 6)$

R-ன் (i) மதிப்பகத்தையும்

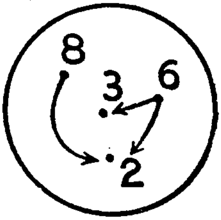
(ii) வீச்சகத்தையும் கண்டுபிடி.

(5) மேலே 2, 3, 4-ம் கணக்கில் கொடுத்துள்ள உறவுகளுக்கு வரைபடங்கள் வரைக.

§6. உறவு வகைகள்

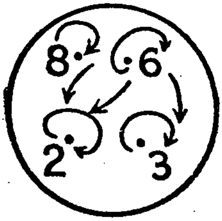
(i) மீட்புறவு (Reflexive relation)

$A = \{8, 6, 3, 2\}$ என்ற கணத்தின் '-ன் வகு எண்' என்ற உறவினைக் குறிக்கும் அம்புக்குறிப் படம் வரைவோம். 8-ன் ஒரு வகு எண் 2. எனவே, ஓர் அம்புக் குறி 8-லிருந்து புறப்பட்டு 2 ஐச் சென்றடைய வேண்டும். இதே போல் 6-லிருந்து ஓர் அம்புக்குறி 3-க்கும், மற்றோர் அம்புக் குறி 2-க்கும் செல்ல வேண்டும்.



படம் 1-13

எந்த எண்ணையும் அந்த எண்ணே வகுக்குமாதலால், ஒவ்வோர் எண்ணும் அதற்கே வகு எண்ணாக அமையும் அல்லவா? எனவே, 8-ன் வகு எண் 8 என்பதைக் குறிக்க 8-ல் தொடங்கி 8-லேயே முடியுமாறு ஓர் அம்புக குறி போடப்பட்டுள்ளது. இதே போல் 6, 3 2 இவற்றிலும் அம்புக்குறிகள் போடப பட்டுள்ளன.



படம் 1-14.

R என்பது '—ன் வகு எண்' என்ற உறவினைக் குறித்தால் $R = \{(8, 2), (6, 2), (6, 3), (8, 8), (6, 6), (3, 3),$

$\{(2, 2)\}$. (8, 8), (6, 6), (3, 3), (2, 2) இவையும் R-ன் உறுப்புகளாக இருப்பதைக் கவனிக்க.

$(8, 8) \in R$ என்பதை, $8 R 8$ என்று எழுதலாம் என்று முன்பே பார்த்தோம்.

$8 R 8$, $6 R 6$, $3 R 3$, $2 R 2$ என்பது போல், A யிலுள்ள ஒவ்வொரு a-க்கும் $a R a$ என இருந்தால் R என்ற உறவிற்கு மீட்புப் பண்பு உள்ளது என்கிறோம்.

[குறிப்பு: மீட்புப் பண்பு பெற்றுள்ள உறவினைக் குறிக்கும் அம்புக்குறிப் படங்களில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் அம்புக்குறி வளையங்கள் இருக்க வேண்டும்.]

மற்றும் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

A என்பது எண்களாலாகிய கணம். R என்பது சமம் என்ற உறவினைக் குறிக்கிறது எனில், R மீட்புப் பண்பு பெற்றுள்ளது. ஏனெனில், $a R a$ (அதாவது $a = a$) என்பது மெய்யானதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

R என்பது பெரியது என்ற உறவினைக் குறிக்கட்டும் (அதாவது $a R b$ என்றால் $a > b$ என்று பொருள்). இங்கு R மீட்புறவல்ல. ஏனெனில், $a R a$, அதாவது $a > a$ என்பது மெய்யானதல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 3:

மக்களின் கணத்தில், R என்பது '-ன் மகன்' என்ற உறவினைக் குறிக்கட்டும். அதாவது $a R b$ என்றால் a-ன் மகன் b என்று பொருளாகட்டும். $a R a$ மெய்யானதல்ல (ஏன்?). எனவே இங்கு R ஒரு மீட்புறவல்ல.

(ii) சமச்சீருறவு (Symmetric relation)

மாணவர்கள் கணத்தில் R என்பது '-ன் நண்பன்' என்ற உறவினைக் குறிக்கட்டும். 'a-ன் நண்பன் b' என்பது மெய்யானால் 'b-ன் நண்பன் a' என்பதும் மெய்யாகுமல்லவா? அதாவது $a R b$ என்பது மெய்யானால் $b R a$ என்பதும் மெய்யாகும். இம்மாதிரியான உறவுகளை நாம் சமச்சீருறவு என்போம்.

மற்றும் சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

எண்களின் கணத்தில் R என்பது 'சமம்' என்ற உறவினைக் குறிக்கட்டும். $a R b$ என்பது மெய்யானால், $b R a$ என்பதும் மெய்யாகும். எனவே, சமம் என்பது ஒரு சமச்சீருறவு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

எண்களின் கணத்தில் R என்பது 'பெரியது' என்ற உறவினைக் குறிக்கட்டும். ($a R b$ என்றால், $a > b$ என்று பொருளாகட்டும்). $a R b$ என்பது மெய்யானால், $b R a$ என்பது மெய்யல்ல. எனவே, R ஒரு சமச்சீருறவு அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

கோடுகளின் கணத்தில், R என்பது 'இணையானது' என்ற உறவினைக் குறிக்கட்டும். 'a' என்ற கோடு, b என்ற வேறொரு கோட்டிற்கு இணை என்றால், b, a-க்கு இணைதானே ? அதாவது $a R b$ மெய்யெனில், $b R a$ என்பதும் மெய்யாகும். ஆகவே, R சமச்சீர் பண்பு பெற்றுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

மக்களின் கணத்தில் R என்பது '-ன் மகன்' என்ற உறவினைக் குறித்தால், R சமச்சீருறவு ஆகாது. ஏனெனில், $a R b$ மெய்யானால், $b R a$ மெய்யல்ல.

(iii) தொடருறவு (Transitive Relation)

வகுப்பில் உள்ள மாணவர்கள் கணத்தில் 'R' என்பது 'உயரமானவன்' என்ற உறவினைக் குறிக்கட்டும். அதாவது $a R b$ என்றால், a, b ஐ விட உயரமானவன் ; b, c ஐ விட உயரமானவன் என்றால், a, c ஐ விட உயரமானவனாகத்தானே இருக்க வேண்டும்? $a R b$-ம், $b R c$-ம் மெய்யெனில், $a R c$-ம் மெய்யாகின்றதல்லவா? இம்மாதிரியான பண்பினைக் கடத்தும் தன்மை பெற்றுள்ள உறவினைத் தொடருறவு என்போம்.

மேலும், சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

எண்களின் கணத்தில், R என்பது சமம் என்ற உறவினைக் குறிக்கட்டும்.

aRb-ம், bRc-ம் மெய்யெனில் aRc-ம் மெய்யாகும் [$a = b$, $b = c$ எனில், $a = c$ அல்லவா ?] ஆகவே, சமம் என்ற உறவு ஒரு தொடருறவு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

எண்களின் கணத்தில் 'R' என்பது 'பெரியது' என்ற உறவினைக் குறித்தால், aRb-ம், bRc-ம் மெய்யெனில், aRc-ம் மெய்யாதலால் R ஒரு தொடருறவு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தளத்திலுள்ள கோடுகளின் கணத்தில், 'R' என்பது 'செங்குத்தானது' என்ற உறவினைக் குறிக்கட்டும். (aRb என்றால், $a \perp b$ என்று பொருளாகும்). aRb-ம், bRc-ம் மெய்யென்றாலும், aRc மெய்யல்ல. (ஏன் ?) எனவே R ஒரு தொடருறவு அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

கோணங்களின் கணத்தில், R என்பது '—ன் நிரப்பி' என்ற உறவினைக் குறிக்கட்டும். கோணம் a-ன் நிரப்பி, கோணம் b; கோணம் b-ன் நிரப்பி, கோணம் c என்றால், கோணம் a-ன் நிரப்பி, கோணம் c என்று கூறமுடியாதல்லவா ? aRb-ம், bRc-ம் மெய் என்றாலும் aRc என்பது மெய்யல்ல. எனவே, R ஒரு தொடருறவு அல்ல.

சமான உறவு (Equivalence relation)

ஓர் உறவு

(a) மீட்புறவு ஆகவும்

(b) சமச்சீருறவு ஆகவும்

(c) தொடருறவு ஆகவும்

இருப்பின், அவ்வுறவைச் '**சமான உறவு**' என்போம்.

மிக முக்கியமானதும், அனைவரும் அறிந்ததுமான ஒரு சமான உறவு எண்களின் கணத்தில் 'சமம்' என்ற உறவாகும். S என்பது ஓர் எண்களின் கணம் எனில், எந்த a, b, $c \in S$-க்கும்

(i) $a = a$ ... ... மீட்புறவு

(ii) $a = b \Longrightarrow b = a$ ... ... சமச்சீருறவு

(iii) $a = b$. $b = c$ எனில் $a = c$ ... தொடருறவு உண்டல்லவா ?

சமான உறவிற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) முக்கோணங்களின் கணத்தில் சர்வ சம உறவு.

(ii) முக்கோணங்களின் கணத்தில் 'சம பரப்புள்ள' எனும் உறவு.

(iii) மனிதர்களில் 'ஒரே மூதாதையரைப் பெற்றவர்' என்ற உறவு.

பயிற்சி 1·6

(1) இயல் எண்களின் கணம் N இல், கீழ்க்கண்டவை ஒவ்வொன்றும் எத்தகைய உறவு என்று ஆராய்க.

(i) a ம் b ம் ஒரே எண்ணிக்கை இலக்கங்களைப் பெற்றிருப்பின், $a R b$.

(ii) a ம் b ம் ஒன்று தானத்தில் ஒரே இலக்கத்தைக் கொண்டுள்ளன எனில், $a R b$.

(iii) $a + b$ ஓர் இரட்டை எண் எனில், $a R b$.

(iv) $a + b$ என்பது 3 இன் மடங்கு எனில், $a R b$.

(2) தளத்திலுள்ள புள்ளிகளிடையே R எனும் உறவு பின்வருமாறு நிறுவப்படுகிறது.

'A, B என்ற புள்ளிகளிடையேயுள்ள தூரம் 1 செ.மீ.-க்குக் குறைவு எனில் $A R B$.'

R ஆனது ஒரு தொடருறவு அல்ல என்று காட்டுக. R ஒரு சமான உறவாகுமா ?

(3) வாழ்க்கையில் மனிதர்களிடையே சில உறவுகளைக் கூறி, அவை எத்தகைய உறவுகள் என்று ஆராய்க.

(4) (i) கோட்டுத் துண்டுகளின் கணத்தில்

(ii) கோணங்களின் கணத்தில்

சர்வ சமம் என்பது ஒரு சமான உறவு என்று காட்டுக.

சார்புகள்

§ 1. உன் வகுப்பில் 40 மாணவர்கள் இருப்பதாகக்கொள்வோம். ஒவ்வொருவருக்கும் வகுப்பில் ஓர் உட்காருமிடம் தரப்பட்டிருக்கிறது அல்லவா ? இந்த இடங்களுக்கு அடையாளங்களாக எண்கள் தரப்பட்டிருக்கட்டும். உன் இடம் எது? 37 ஆம் எண் குறித்துள்ள இடமா ? உன் சகமாணவன் சுப்புவின் இடம் எது ? 15 ஆம் எண் குறித்துள்ள இடம் தானே ? இவ்வாறாக, ஒவ்வொரு மாணவனுக்கும் ஓர் இடம் நிச்சயமாகத் தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு X என்பது வகுப்பு மாணவர்களின் கணம், Y என்பது உட்காருமிடங்களின் கணம் (1, 2, 3, ... குறிக்கப்பட்டுள்ளது) என்க.

$X = \{$ ஆதிமூலம், பாச்சா, சடையப்பன், திரவியம், ... $\}$

$Y = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$

எனில், X-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் Y-லிருந்து ஓர் உறுப்பு — ஒரே ஓர் உறுப்பு — பிணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. இப் பிணைப்பு ஏதோ ஒரு விதிப்படி (rule) அமைந்துள்ளது. அவ் விதிக்கு, X-லிருந்து Y-க்குச் சார்பு (function) என்று பெயர். X-ல் குறிப்பிட்ட ஓர் உறுப்புடன் Y-லிருந்து பிணைக்கப்பட்ட உறுப்புக்குச் சார்பலன் (functional value) என்று பெயர். X ஆனது சார்பின் மதிப்பகம் (domain). Y ஆனது சார்பின் துணை மதிப்பகம் (codomain). சார்பினை $f : X \longrightarrow Y$ என்று குறிப்போம். $x \in X$ எனில், x உடன் பிணைக்கப்பட்ட Y-ன் உறுப்பை $f(x)$ என்று குறிப்போம். $f(x)$ ஐ, x-ன் பிம்பம் (image) என்றும் குறிப்பது வழக்கம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$Y = \{ 1, 4, 5, 9, 16, 25, 36, 40 \}$ என்க.

'X-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புடனும் அதன் வர்க்க எண்ணைத் தொடர்புப்படுத்தவும்' என்ற விதியானது ஒரு சார்பாகும். இதனை f என்று குறித்தால்,

$$f(1) = 1, \; f(2) = 4, \; f(3) = 9, \; f(4) = 16, \; f(5) = 25.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$X = N$, $Y = N$ என்க ; '$x \in N$ எனில், $f(x)$ என்பது $2x$' என்ற விதியும் ஒரு சார்பைக் குறிக்கும். இங்கு $f(3) = 6$, $f(100) = 200$, ...

§2. $f : X \longrightarrow Y$ ஒரு சார்பு என்க. $x \in X$ எனில், x-ன் பிம்பங்களனைத்தும் ஒரு கணத்தை ஆக்கும். இக் கணத்தை 'f-ன் வீச்சகம் (range of f)' என்று குறிப்பிடுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1-ல், வீச்சகம் $= \{1, 4, 9, 16, 25\}$.

எடுத்துக்காட்டு 2-ல், வீச்சகம் = இரட்டை எண்களின் கணம்.

ஒரு சார்பின் வீச்சகம், அதன் துணை மதிப்பகத்தின் உட்கணமாகவே இருக்கும்.

§3. மேற் கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து, சார்பு என்பதும் ஓர் உறவே என்பது புலப்படும். ஆனல் சார்பு, ஒரு தனித்தன்மை வாய்ந்த உறவு ; இத் தனித்தன்மை யாதெனில், $x \in X$ எனில், x உடன் Y-லிருந்து ஒரே ஓர் உறுப்புதான் உறவு பூண்டிருக்க வேண்டும். ஆகவே, ஒரு சார்பின் வரைபடத்தில் ஒவ்வொரு குத்துக் கோட்டின் மேலும் வரைபடத்தின் புள்ளிகள் ஒன்றுக்கு மேல் இருக்காது.

எல்லாச் சார்புகளும் உறவுகள். எல்லா உறவுகளும் சார்புகளாகா.

§4. X என்பது உன் வகுப்பு மாணவர்களின் கணம், Y என்பது உன் பள்ளி ஆசிரியர்களின் கணம் என்க. f என்பது X-லிருக்கும் ஒவ்வொரு மாணவனுடனும் அவனது வகுப்பாசிரியரைப் பிணைக்குமாயின், $f : X \longrightarrow Y$ ஒரு சார்புதானே ? இங்கு

X-ன் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் பிம்பம் ஒன்றேயல்லவா? இத்தகைய சார்புகளை **மாறிலிச் சார்புகள் (constant functions)** என்போம். குறியீட்டில், $x \in X$, $f(x) = y_0$, y_0 என்பது Y-ல் ஒரு குறிப்பிட்ட (நிலையான) உறுப்பு எனில், $f : X \longrightarrow Y$ ஒரு மாறிலி சார்பாகும்.

மாறிலி சார்பின் வீச்சகம் ஒருறுப்புக் கணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$X = \{1{\cdot}4,\ 1{\cdot}7,\ 1{\cdot}05,\ 1{\cdot}92,\ 1{\cdot}001\},$$

$$Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

f என்பது, 'X-லுள்ள ஒவ்வோர் எண்ணுடனும் அதனுடைய முழு எண் பாகத்தைப் பிணை' என்ற விதி.

இங்கு $f : X \longrightarrow Y$ ஒரு சார்பு.

$$f(1{\cdot}4) = 1,\ \ f(1{\cdot}7) = 1,\ \ldots,\ f(1{\cdot}001) = 1$$

என்பதால், f ஆனது ஒரு மாறிலி சார்பு.

§ 5. சில சார்புகளுக்கு, மதிப்பகமும் துணை மதிப்பகமும் ஒரே கணமாக இருக்கலாம். இந் நிலையில், X-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புடனும் அதே உறுப்பினைப் பிணைப்பதும் ஒரு சார்பு தானே? இச் சார்பினைச் **சமனிச் சார்பு (identity function)** என்போம். இங்கு,

$$x \in X \text{ எனில்},\ f(x) = x.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ராமனும், ரிச்சர்டும் ஒரே நாளில் பிறந்தவர்கள். வெவ்வேறு நாள்களில் ராமனின் வயதுகளின் (எண்கள்) கணம் X, ரிச்சர்டின் வயதுகளின் கணம் X என்க. $x \in X$ எனில், x உடன், அதே நாளில் ரிச்சர்டின் வயதைப் பிணைப்பதே சார்புதானே? இது சமனிச் சார்பு. ஏனெனில், இங்கு $f(x) = x$.

சமனிச் சார்பின் வரைபடங்கள், அச்சுகளினாலாகிய கோணத்தின் இரு சமவெட்டி மீது அமைந்திருக்கும்.

பயிற்சி 1·7

(1) சார்புகளுக்கு மூன்று எடுத்துக்காட்டுகள் தருக.

(2) பின் வருவன சார்புகளா என்றுராய்க.

	கணம் X	கணம் Y	விதி f
(i)	உலக நாடுகள்	உலக நகரங்கள்	ஒவ்வொரு நாட்டுடனும் அதன் தலை நகரத்தைப் பிணைக்க. எ. கா. f(இந்தியா) = புது டில்லி.
(ii)	வகுப்பு மாணவர்கள்	ஊர்கள்	ஒவ்வொரு மாணவனுடனும் அவன் பிறந்த ஊரைப் பிணைக்க.
(iii)	$\{125, 64, 1,\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$f(x) = x$-ன் கண மூலம்
(iv)	$\{7, 8, 10\}$	$\{4, 5, 7\}$	$f(x) = x - 3$
(v)	Z	W	$f(x) = \lvert x \rvert$

(3) முன் கணக்கிலுள்ள சார்புகளின் வீச்சகங்களைக் காண்க.

(4) $f : W \longrightarrow W$, $f(x) = 3x + 5$ என்பது ஒரு சார்பா என்று ஆராய்க. சார்பு ஆயின் அதன் வீச்சகம் யாது ?

[பொதுவில் $f(x) = ax + b$ என்று வரையறுக்கப்படும் சார்புகள் ஒருபடிச் சார்புகள் (linear functions) என்று குறிப்பிடப் படும்.]

(5)

x :	4	5	6	6·5	7·1	8
$f(x)$:	20	25	30	32·5	35·5	40

(i) இந்த அட்டவணை ஒரு சார்பினைக் குறிக்கிறதா ?

(ii) இச் சார்பினை வரையறுக்கும் விதி யாது ?

[பொதுவில், $f(x) = kx$ என்ற விதிக்கு நேர் விகிதச் சார்பு (direct variation function) என்று பெயர்.]

(6)

x :	4	8	10	5	2·5	$2\frac{2}{3}$	50
$f(x)$:	25	12·5	10	20	40	37·5	2

(i) இந்த அட்டவணை ஒரு சார்பினைக் குறிக்கிறதா ?

(ii) இச் சார்பினை வரையறுக்கும் வடிவம் யாது ?

[பொதுவில், $f(x) = \frac{k}{x}$, $x \in Q^+$ என்ற விதி ஓர் எதிர் விகிதச் சார்பு (inverse variation function) எனப்படும்.]

(7) (i) மாறிலி சார்புகள் (ii) சமனிச் சார்புகள் — ஒவ்வொன்றிற்கும் இரு எடுத்துக்காட்டுகள் தருக.

2. தருக்க முறை

நாம் வாழ்க்கையில் பல நிகழ்ச்சிகளைப் பார்க்கிறோம். அவற்றில் சில திரும்பத் திரும்ப நிகழ்கின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, (i) ஏறத்தாழ 24 மணி நேரத்திற்கொரு முறை சூரியன் உதயமாகிறது. (ii) தங்கத்தின் விலை, வெள்ளியின் விலையைவிட அதிகமாக இருக்கிறது. (iii) சமபக்க முக்கோணம் ஒவ்வொன்றிலும் ஒவ்வொரு கோணத்தின் அளவும் 60 ஆக இருக்கிறது. (iv) அடுத்தடுத்து வரும் மூன்று இயல் எண்களின் பெருக்குத் தொகை 6 ஆல் வகுபடுகிறது.

இவை ஒவ்வொன்றும் நாம் பெற்ற அனுபவத்தைக் குறிக்கின்றது. நமது அனுபவத்தினால் நாம் தேர்ந்தறிந்த மேற்கூறியவை போன்றவை 'வாக்கியங்கள்' எனப்படும்.

அடுத்தபடியாக, நமது அனுபவத்திலேயே, மேற்கூறிய நிகழ்ச்சிகள் எப்போதும் நிகழுமா என்ற கேள்வி பிறக்கிறது. பலமுறை திரும்பத் திரும்ப நிகழ்ந்த நிகழ்ச்சிகள் சில சமயங்களில் பொய்த்து விடுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, பல நாள்கள் சரியாகக் காலை 7 மணிக்கு நம் ஊருக்கு வந்து சேர்ந்துகொண்டிருந்த இரயில் வண்டி ஒரு நாள் 7 மணிக்கு வருவதில்லை.

எனவே, இத்தகைய 'வாக்கியங்கள்' எப்போதும் மெய்யான வையா என்று ஆராய வேண்டியிருக்கிறது, தகுந்த காரணங் களுடன் ஒரு கூற்று எப்போதும் மெய்யானது என்று காட்டுவதை நிரூபணம் (proof) அல்லது நிறுவுதல் (proving) என்கிறோம். மெய்யான கூற்றுகளைத் தேற்றங்கள் (theorems) என்கிறோம். ஒவ்வொரு தேற்றமும் ஒரு நிபந்தனை வாக்கியமாகும். சில இடங்களில் தேற்றத்தின் உருவம் வெளிப்படையாக நிபந்தனை வாக்கியமாகக் கொடுக்கப்பட்டிராவிட்டாலும், தேற்றத்தை இவ்வுருவில் எழுத முடியும். எடுத்துக்காட்டாக, மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள (iv) ஆம் தேற்றத்தை, "a, b, c என்பன அடுத்தடுத்துள்ள மூன்று இயல் எண்களாயின், abc ஆனது 6 ஆல் வகுபடும்" என்று விரித்தெழுதலாம். இத் தேற்றத்தில் "a, b, c என்பன அடுத்தடுத்துள்ள மூன்று இயல் எண்கள்" என்பது கொள்கை (hypothesis) எனப்படும். "abc ஆனது 6 ஆல் வகுபடும்" என்பது முடிவு (conclusion) எனப்படும்.

தேற்றங்களை நிறுவுதல் எவ்வாறு? எல்லோராலும் ஒப்புக் கொள்ளப்பட்ட சில அடிப்படை உண்மைகளைப் பயன்படுத்தித் தருக்க முறையில் நிரூபணங்கள் தரப்படுகின்றன. இவற்றைப் பற்றிச் சிறிது விரிவாக ஆராய்வோம்.

வாழ்க்கையில் நாம் பல கருத்துகளைப் பற்றிப் பேசி வரு கிறோம். நிழல் என்றால் என்ன? "ஒளி செல்லும் பாதையில் ஒரு பொருளை வைத்து அதைத் தடுப்பதால் உண்டாவது நிழல்" என்று பதிலளிக்கலாம். இங்கு நிழலுக்கு ஒரு விவரணம் தந்துள்ளோம். இவ் விவரணத்தை நாம் புரிந்து கொண்டால், நிழல் என்பது என்ன என்றும் நாம் அறிந்தவர்களாவோம். இவ்வரையறையில் "ஒளி" "பாதை" "தடுத்தல்" என்ற சொற்கள் வந்துள்ளன. "ஒளி" என்றால் என்ன? "பாதை" "தடுத்தல்" என்றால் என்ன? என்பன போன்ற கேள்விகளை இப்போது கேட்கலாம். முதல் கேள்விக்கு "எது இருப்பதால் பொருள்கள் நம் கண்களுக்குப் புலப்படுகின்றனவோ, எது இல்லாவிடில் இருட்டாக இருக்கின்றதோ அதுவே ஒளி," என்று பதிலளிக்கலாம். இப்போது "புலப்படுதல்" "இருட்டு" என்பன யாவை? என்று மறுபடியும் கேட்கலாம். இருட்டுக்கு விளக்கம் தர முற்பட்டால், நிழல், ஒளி என்ற சொற்களை அவசியம் பயன்படுத்த வேண்டியிருக்குமல்லவா? இதனால் நாமறிவதாவது: எல்லாச் சொற்களையும் வரையறுத்துக் கூறுதல் என்பது இயலாத காரியம். சில சொற்களின் பொருள்கள் நாம் (எவ் விதமோ) அறிந்தவையே என்று கொண்டு, அவற்றைச்

கொண்டே வேறு புதிய சொற்களின் பொருள்களை கூறமுடியும். இவ்வாறு, நாம் இயற்கையாகப் புரிந்து கொண்டவையாக எடுத்துக் கொள்ளப்படும் சொற்களை, "வரையறுக்கப் படாத சொற்கள்" (undefined terms) என்று குறிப்பிடுவோம். அவற்றைக் கொண்டு விவரிக்கப்படும் சொற்களை "வரையறுக்கப்பட்ட சொற்கள்" (defined terms) என்று குறிப்பிடுவோம். இவற்றிற்குத் தரப்படும் விவரிப்பை "வரையறை" (definition) என்போம்.

எந்தப் பொருளைப் பற்றியும் விவாதிக்கும் போது சில வாக்கியங்களை ஆராயாமலே மெய்யானவை என்று ஒப்புக் கொள்கிறோம். "திருடர்கள் தண்டிக்கப்பட வேண்டியவர்கள்," "இரு புள்ளிகள் வழியே ஒரு கோடு வரையலாம்," "இரு எண்கள் சமம் என்றால், அவற்றின் வர்க்கங்களும் சமம்" போன்றவை இதற்கு எடுத்துக்காட்டுகள். இத்தகைய வாக்கியங்களை "வெளிப்படை உண்மைகள்" (axioms) என்போம். வெளிப்படை உண்மைகளின் கருத்துகள் மெய்யானவை என்பது எளிதில் அறியத்தக்கதாக இருக்க வேண்டும் என்பது அவசியம் இல்லை. அவை மெய்யானவை என்று எல்லோராலும் ஒப்புக் கொள்ளப்பட்டால் போதும்.

வரையறுக்கப்படாத சொற்களைக் கொண்டும், அவற்றைக் கொண்டு வரையறுக்கப்பட்ட சொற்களைக் கொண்டும், வெளிப்படை உண்மைகளைக் கொண்டும் சில வாக்கியங்களை அமைக்கலாம். இப் புதிய வாக்கியங்கள் மெய்யானவையா அல்லவா என்று ஆராய்தல் அவசியம். இவ்வாறு ஆராயும்பொழுது தருக்க முறையைப் பின்பற்றுகிறோம்.

"இன்று திருவிழாவானதால் மக்கள் கூட்டம் அதிகமாய் உள்ளது. மக்கள் கூட்டம் அதிகமாக இருப்பதால் உணவுப் பொருள் பற்றாக் குறை ஏற்பட்டுள்ளது. இதன் காரணமாக உணவுப் பண்டங்கள் விலை இன்று ஏறியுள்ளது." என்ற முறையில் விவாதிப்பதை நீங்கள் கேட்டிருக்கலாம். இங்கு ஒவ்வொரு சொற்றொடரும் இரு பிரிவுகள் கொண்டிருப்பதைக் காண்க. முதல் பிரிவில் காரணமும், இரண்டாவது பிரிவில் அதன் விளைவும் கூறப்பட்டுள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக முதல் சொற்றொடரில் "இன்று திருவிழா" என்பது காரணம்; "மக்கள் கூட்டம் அதிகமாக உள்ளது" என்பது விளைவு. "திருவிழா நடைபெற்றால் அங்கு மக்கள் கூட்டம் அதிகமாக இருக்கும்" என்பது ஒரு மெய்யான நிபந்தனை வாக்கியம். "இங்குத் திருவிழா நடக்கிறது. ஆகவே, இங்கு மக்கள் கூட்டம்

அதிகமாக இருக்கிறது'' என்பது சரியான முடிவு (valid conclusion). பொதுவில் p, q என்பன கூற்றுகள் என்று கொண்டால், ''p மெய்யானல் q-ம் மெய்யாகும்'' என்று நாம் அறிந்திருந்து, ஓர் இடத்தில் p மெய்யானது என்றும் அறிந்திருந்தால் அப்பொழுது q-ம் மெய்யாகும். இவ்விதம் நாம் முடிவுகள் பெறுவதற்கு ''மும்மடி நியாயம்'' (syllogism) என்று பெயர். மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில் ஒவ்வொரு சொற்றொடரும் ஒவ்வொரு மும்மடி நியாயம் ஆக அமைகிறதைக் கவனிக்கவும். நிரூபணம் என்பது இவ்விதமான மும்மடி நியாயங்கள் அடங்கியது. இவற்றில் முதல் மும்மடி நியாயத்தின் காரணம் ஆனது கொடுத்துள்ள தேற்றத்தின் கொள்கையாகவும், கடைசி மும்மடி நியாயத்தின் முடிவானது தேற்றத்தின் முடிவாகவும் அமைந்திருந்து, இடையிலுள்ள ஒவ்வொரு மும்மடி நியாயத்தின் காரணப் பகுதியும், அதன் முந்தைய மும்மடி நியாயத்தின் முடிவுப் பகுதியாக அமைந்திருந்தால், அத்தகைய மும்மடி நியாயத்தின் தொகுப்பைத் தேற்றத்தின் நிரூபணம் என்று கூறுகிறோம்.

நிரூபணங்கள் பல வகைப்படும். அவற்றில் ஒரு வகை மேற்கூறிய முறைப்படி, மும்மடி நியாயங்களின் தொகுப்பாக அமைந்துள்ள நிரூபணங்கள். இவைதாம் பெரும்பாலும் நாம் காண்பவை. முடிவுறுக் கணங்களைப் பற்றி நாம் ஆராயும்போது இத்தகைய நிரூபண முறையையே பின்பற்றுகிறோம்.

முடிவுறு கணங்களைப் பற்றிய தேற்றங்களை நிரூபிக்க, மற்றொரு முறை உள்ளது. இதனை ஓர் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்கலாம். 7 நாட்காட்டி எண்களின் கணத்தில்

$$(x + 1)^2 = (x^2 + 2x + 1)$$

என்று நிரூபிக்க வேண்டும் என்க. 7 எண்களின் கணம் $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. இது ஒரு முடிவுறுகணம். இத் தேற்றத்தை நிரூபிக்க, நாம் x-க்குப் பதில் முறையே $1, 2, 3, \ldots, 7$ என்று எடுத்துக் கொண்டு தேற்றத்தைச் சரிபார்த்துவிட்டால் போதுமே! இத்தகைய நிரூபணங்களை, சரிபார்வகை நிரூபணம் (proof by exhaustion) என்பர்.

அடுத்தபடியாக, மறைமுக நிரூபணங்கள் என்று வழங்கப்படும் நிரூபண வகையினை ஆராய்வோம். நம் வீட்டுக் கண்ணாடி ஜாடியொன்று இன்று உடைந்துள்ளது. அதனை உடைத்திருக்கக் கூடியவர்கள் கமலா, அவள் தோழி ஜானி, அல்லது அவள்

தம்பி மணியன் என்க. கமலாதான் ஜாடியை உடைத்தவள் என்று நிரூபிக்க, பின்வருமாறு விவாதிப்போம்.

''கமலா உடைக்கவில்லை என்று வைத்துக் கொள்வோம். அப்போது ஜானியோ அல்லது மணியனோதான் உடைத்திருக்க வேண்டும். ஜானி, இன்று முழுவதும் இங்கு வரவேயில்லை. ஆகவே, அவள் உடைத்திருப்பாள் என்று கொள்வது பொருந் தாது. மேலும், மணியன் இன்று முழுவதும் வானொலிப் பெட்டி அருகிலேயே உட்கார்ந்து கொண்டு கிரிக்கெட் விமரிசனம் கேட்டுக் கொண்டிருந்தான், ஜாடியருகில் வரவேயில்லை. ஆகவே, அவன் உடைத்ததாகக் கொள்வதும் பொருந்தாது. எனவே, கமலாதான் உடைத்திருக்க வேண்டும்.''

இவ் வாதத்தினை ஆராய்ந்தால், நாம் எதை நிரூபிக்க விழைகிறோமோ அதனை மறுத்துவிட்டு, அதனால் ஏற்படும் விளைவுகள் எதுவும் பொருந்தாத முடிவு என்று காட்டுகிறோம். இதனால் நமது தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டதாக ஆகிவிடுகிறது. இத்தகைய நிரூபணங்களை, **மறைமுக நிரூபணங்கள்** என்போம்.

சில கூற்றுகளை மெய்யற்றவை என்று நிரூபிக்க வேண்டுமாயின், அவை பொய்த்துவிடும் சூழ்நிலையொன்றைச் சுட்டிக் காட்டினால் போதுமானது. எடுத்துக்காட்டாக, 'n என்பது ஏதேனுமோர் இயல் எண் எனில், $n^2 + n + 41$ என்பது ஒரு பகா எண் ஆகும்' என்ற கூற்று மெய்யற்றது என்று காட்ட விழைந்தால், $n^2 + n + 41$ என்பது பகு எண்ணாக இருக்கும் படிககு ஒரு தகுந்த இயல் எண் nஐக் காட்டினால் போதுமானது. இங்கு 40 இத்தகைய எண். $n = 40$ எனில்,

$$n^2 + n + 41 = 40^2 + 40 + 41 = 40\,(40 + 1) + 41$$
$$= 41\,(40 + 1) = 41 \times 41.$$

எனவே, இக்கூற்று மெய்யற்றது. இங்கு 40 என்ற எண்ணை **மறுப்பு உதாரணம் (counter example)** என்கிறோம். மற்றொரு மறுப்பு உதாரணம் தர உன்னால் முடியுமா ?

ஒரு கூற்று மெய்யற்றது என்று காட்ட, ஓரேயொரு 'மறுப்பு உதாரணம்' போதுமானது.

பயிற்சி 2·1

(1) அன்றாட வாழ்க்கையில் நீ கண்டறிந்த தேற்றங்கள் சிலவற்றைக் கூறுக.

(2) பின்வரும் தேற்றங்களை, நிபந்தனை வாக்கியங்களாக எழுது. ஒவ்வொன்றிலும் கொள்கையையும் விளைவையும் சுட்டிக்காட்டுக.

(i) வயதானவர்கள் இறந்து விடுகிறார்கள்.

(ii) தினை விதைத்தவன் தினை அறுப்பான்.

(iii) ஒற்றை எண்களின் வர்க்கங்கள் ஒற்றை எண்களே.

(iv) இரு இணை கோடுகளுக்குப் பொதுப்புள்ளி கிடையாது.

(3) அடியிற் சில கொள்கைகள் தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து நீ பெறும் விளைவுகளைக் கூறுக.

(i) மனிதர்கள் இறக்க வேண்டியவர்களே. காந்தியடிகள் ஒரு மனிதர்.

(ii) எந்த முக்கோணத்திலும், அதன் கோண அளவுகளின் கூடுதல் $180°$ ஆகும். PQR என்பது ஒரு முக்கோணம்.

(iii) இரட்டையெண்களின் வர்க்கங்கள் 4 ஆல் வகுபடும். 12 என்பது ஓர் இரட்டையெண்.

(4) வரையறைகள் மிகவும் கவனமாகத் தரவேண்டியவை. ஏதேனும் இரு பொருள்களுக்கு வரையறை கொடுக்க முயன்று பார்க்க. உன் வரையறைகளை, மற்றும் சிலருடன் கலந்து ஆராய்ந்து பார்க்க.

(5) பின்வருவன சரியான வாதங்களா என்று ஆராய்க:

(i) நீ நல்லாட்சியை விரும்பினால், கழுதைச் சின்னத்திற்கு உன் வாக்கை அளிப்பாய். நீ கழுதைச் சின்னத்திற்கு உன் வாக்கை அளித்துள்ளாய். எனவே, நீ நல்லாட்சியை விரும்புகிறாய்.

(ii) ஐந்தால் வகுபடும் எண்ணின் வர்க்கம் ஐந்தால் வகுபடும். $15^2 = 225$ ஆனது ஐந்தால் வகுபடுகிறது. எனவே, 15-ம் ஐந்தால் வகுபடுகிறது.

(iii) எல்லாச் சதுரங்களிலும் மூலை விட்டங்கள் சமநீள முள்ளவை. $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் $AC = BD$. எனவே, $ABCD$ ஒரு சதுரமாகும்.

(6) பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்வகை முறையில் நிறுவுக :

(i) 7 ஐ இரு வர்க்க எண்களின் கூட்டுத் தொகையாக எழுத முடியாது.

(ii) $\{ 1, 2, 4, 7, 14 \}$-ன் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் 56-ன் வகு எண்கள்.

(iii) $n \in \{ 1, 3, 7, 9, 13, 19, 21, 43 \}$ எனில், $5n + 2$ ஒரு பகா எண்.

(7) மறைமுக நிரூபண முறை, கணிதத்தின் ஒரு சக்தி வாய்ந்த ஆயுதம். வாழ்க்கையில் இம் முறையை நீ பயன்படுத்திய இரண்டு சூழ்நிலைகளை விவரிக்க.

(8) மறுப்பு உதாரணங்கள் தந்து பின்வரும் கூற்றுகள் மெய்யற்றவையென்று காட்டுக.

(i) ஐந்து இலக்க எண்களெல்லாம் ஆறிலக்க எண்களை விடப் பெரியவை.

(ii) n என்பது இயல் எண் எனில், $n^2 + n + 17$ ஒரு பகா எண்.

(iii) ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்கள் சமநீள முள்ளவையாயின், அவற்றின் கோணங்களும் சம அளவுள்ளவை.

(9) பின்வரும் கூற்றுகள் மெய்யானவையா அல்லவா என்று தக்க முறையில் ஆராய்க :

(i) $x \in \{ -1, -2, -3 \}$ எனில்,

$$x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6 = 0.$$

(ii) $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

(iii) மெய்யெண்கள் கணத்தில் $x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணம் வெற்றுக் கணமாகும்.

3. எண்மான முறையினங்கள்

§ 1. அடுக்குகளும் அடுக்குக் குறிகளும்

அடுக்குகளைப் பற்றியும், அடுக்குக் குறிகளைப் பற்றியும் முன் வகுப்புகளில் படித்திருக்கிறீர்கள். அவற்றை முதலில் நினைவு படுத்திக் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$10{,}00{,}000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$64 = 8 \times 8 = 8^2$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

அடுக்குக் குறிகளின் விதிகள்

(1) $m \in N,\ n \in N$ எனில், $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ... ...

(2) $m \in N,\ n \in N$ எனில், $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $m \in N$ எனில், $(ab)^m = a^m b^m$

(4) $m \in N,\ b \neq 0$ எனில் $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

[குறிப்பு : 0 ஆல் வகுப்பதற்குப் பொருள் இல்லையாதலால், $b \neq 0$ என்ற நிபந்தனை அவசியம் என்பதைக் கவனி.]

(5) $m \in N, n \in N,\ m > n$ எனில், $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ...

(6) $a \neq 0$ என்றால் $a^0 = 1$

[குறிப்பு : 0^0-க்குப் பொருள் கிடையாது. எனவே, $a \neq 0$ என்ற நிபந்தனை அவசியமாகிறது.]

பயிற்சி 3·1

(1) பின்வருவனவற்றைக் கணிக்க :

(i) 4^3 (ii) 3^4 (iii) 15^2 (iv) $(-5)^4$

(v) $(-6)^3$ (vi) $(-25)^2$ (vii) 1^{100} (viii) $(-1)^3$

(ix) $(-1)^{25}$ (x) $(-1)^{12}$ (xi) $(2^{3})^{2}$ (xii) $(-3)^{9}$

(xiii) $\frac{10^{2}}{5^{3}}$ (xiii) $\frac{4^{4}}{2^{8}}$.

(2) விதிகளைப் பின்பற்றிச் சுருக்குக :

(i) $\frac{3^{4} \times 3^{5}}{3^{8}}$ (ii) $\frac{4^{24}}{2^{48}}$ (iii) $\frac{9^{20}}{27^{9}}$

(iv) $\frac{4^{9} \times (4^{2})^{3}}{(4^{3})^{6}}$ (v) $\frac{(3 \times 7)^{8}}{9 \times 49}$

(vi) $\left(\frac{3}{5}\right)^{8} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{7} \times \left(\frac{5}{4}\right)^{6}$ (vii) $\frac{15^{8} \times 48^{6}}{60^{7} \times 9^{4}}$

(3) $3^{n} = 64$ எனில், (i) 3^{n+1}, 3^{n-1}, (ii) 3^{n+2}, 3^{n-2}, (iii) 9^{n} ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

§2. 3^{-4}-ன் பொருள் என்ன ?

'$3 \times 3 \times \ldots$ என்று -4 முறை பெருக்கி வரும் எண்' என்று பொருள் கொள்ள முடியாதல்லவா ? முன் வகுப்பில் 3^{-4}-க்குப் பொருள் தந்திருக்கிறோம். 3^{-4} என்பதன் பொருள் $\left(\frac{1}{3^{4}}\right)$

பொதுவாகக் கூற,

$a \neq 0$ எனில், $a^{-m} = \frac{1}{a^{m}}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

அடுக்குக் குறி மிகை எண்ணாக இருக்குமாறு கூறுக.

(i) 4^{-3} (ii) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-4}$

தீர்வு :

(i) $4^{-3} = \frac{1}{4^{3}}$

(ii) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-4} = \frac{2^{-4}}{7^{-4}} = \frac{1}{2^{4}} \div \frac{1}{7^{4}} = \frac{1}{2^{4}} \times 7^{4}$

$= \frac{7^{4}}{2^{4}}$

கீழ்வரும் கணக்குகளைக் கவனிக்க :

(i) $3^5 \times 3^{-3} = 3^5 \times \frac{1}{3^3} = \frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2 = 9$

இங்கு 3^2 என்பதை 3^{5-3} என்று எழுதலாம். எனவே,
$3^5 \times 3^{-3} = 3^{5+(-3)}$ என்றாகிறது.

(ii) $4^{-5} \times 4^{-3}$

$$= \frac{1}{4^5} \times \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4^5 \times 4^3} = \frac{1}{4^{5+3}}$$

$$= \frac{1}{4^8} = 4^{-8}$$

மேலும், 4^{-8} ஐ $4^{-5-3} = 4^{(-5)+(-3)}$ என்றும் எழுதலாமல்லவா? எனவே, $4^{-5} \times 4^{-3} = 4^{(-5)+(-3)}$ என்றாகிறது.

பொதுவில்

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ எனும் விதி (1), $m \in Z$, $n \in Z$ என்ற போதும் மெய்யாகிறது.

அடுத்தபடியாக,

(i) $\frac{4^{-3}}{4^{-5}} = \frac{1}{4^3} \div \frac{1}{4^5}$

$$= \frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$$

$$= 4^{(-3)-(-5)}$$

(ii) $\frac{8^{-5}}{8^{-2}} = \frac{1}{8^5} \div \frac{1}{8^2} = \frac{8^2}{8^5}$

$$= \frac{1}{8^3} = 8^{-3}$$

$$= 8^{(-5)-(-2)}$$

போன்ற எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம்

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ என்ற விதி (5)-ம்

$m \in Z$, $n \in Z$ என்ற போதும் மெய்யானதாகிறது புலப்படும்:

பயிற்சி 3·2

(1) பின்வருவனவற்றை அடுக்குக் குறி மிகை எண்ணாக இருக்குமாறு எழுதுக.

(i) 8^{-5} (ii) 4^{-a} (iii) a^{-4} (iv) a^{-b}

(v) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$ (vi) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-a}$ (vii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}$

(viii) $(-4)^{-3}$ (ix) $(-b)^{a}$

(2) அடுக்குக் குறி குறை எண்ணாக இருக்குமாறு பின்வருவனவற்றைக் கூறுக. $(a > 0, \ b > 0)$

(i) $\left(\frac{1}{6^3}\right)$ (ii) $\left(\frac{6}{5}\right)^2$ (iii) $\frac{1}{(-2)^5}$ (iv) $\frac{1}{a^4}$

(vi) a^b (vi) $\left(\frac{a}{b}\right)^5$ (vii) $\cdot 1$ (viii) $\cdot 01$

(3) சுருக்குக.

(i) $8^4 \times 8^3$ (ii) $x^{-5} \times x^{-3}$ (iii) $7^{-3} \times 7^{-8}$

(iv) $a^2 \times a^{-5}$ (v) $\frac{y^{-3} \times y^4}{y}$ (vi) $\frac{x^5 \times x^{-8}}{x^{-2} \times x^{-6}}$

(vii) $\frac{x^{-4} \times x^7 \times x^3}{x^2 \times x^{-5} \times x}$ (viii) $x^4 \times x^{-4}$

§3. விஞ்ஞானக் குறியீடு (Scientific Notation)

சூரியனின் பொருள் திணிவு

1,960,000,000,000,000,000,000,000,000,000 டன்கள்.

இந்த எண்ணை எவ்வாறு படிப்பீர்கள் ?

மின்னணுவின் பொருள் திணிவு

0·000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,911 கிராம்.

இந்த எண்ணை எவ்வாறு படிப்பீர்கள் ?

மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் உள்ளது போல் மிகப் பெரிய எண்களையோ அல்லது மிகச் சிறிய எண்களையோ எழுதுவதும், படிப்பதும் சற்று கடினமாக இருக்கிறதல்லவா ? இவை போன்றவற்றை எழுதுவதற்கும் படிப்பதற்கும் எளிதாக

இருக்கும்படி எவ்வாறு சுருங்கிய வடிவில் அமைப்பது என்பதைப் பார்ப்போம்.

3548 என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். இதை 10-ன் அடுக்குகளைப் பயன்படுத்தி எழுதும் ஒரு முறை பின்வருமாறு.

$$3548 = 354{\cdot}8 \times 10 = 354{\cdot}8 \times 10^{1}$$
$$3548 = 35{\cdot}48 \times 100 = 35{\cdot}48 \times 10^{2}$$
$$3548 = 3{\cdot}548 \times 1000 = 3{\cdot}548 \times 10^{3}$$
$$3548 = {\cdot}3548 \times 10000 = {\cdot}3548 \times 10^{4}$$
$$3548 = {\cdot}03548 \times 100000 = {\cdot}03548 \times 10^{5}$$

இவ்வாறு 10-ன் பிற அடுக்குகளைப் பயன்படுத்தி 3548 ஐப் பல வழிகளில் குறிக்கலாம். இவற்றுள் 3548 ஐ $3{\cdot}548 \times 10^{3}$ எனக் குறிப்பதை விஞ்ஞானக் குறியீட்டில் எழுதப்பட்டுள்ளது என்போம்.

எண்களை விஞ்ஞானக் குறியீட்டில் மாற்றி எழுதியுள்ள பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளைக் கவனி.

(i) $67{\cdot}54 = 6{\cdot}754 \times 10^{1}$

(ii) $948{\cdot}7 = 9{\cdot}487 \times 10^{2}$

(iii) $8347 = 8{\cdot}347 \times 10^{3}$

(iv) $75632 = 7{\cdot}5632 \times 10^{4}$

ஓர் எண்ணை இவ்வாறு தசமப் புள்ளிக்கு முன் உள்ள முழு எண் பகுதியில் ஒரே ஓர் இலக்கம் கொண்ட எண் (அதாவது 1-க்கு மேல் 10-க்குள் உள்ள எண்) 10-ன் தகுந்த அடுக்கு இவற்றின் பெருக்கல் பலனாக எழுதுவதை விஞ்ஞானக் குறியீட்டில் குறிப்பதாகக் கூறுவோம். விஞ்ஞானக் குறியீட்டில் எழுதியுள்ளதை நியம உருவத்தில் எழுதப்பட்டுள்ளது எனக் கூறுவதுண்டு.

அடுத்ததாக, மிகச் சிறிய எண்களை எவ்வாறு விஞ்ஞானக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி எழுதுவது எனக் காண்போம்.

சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

$${\cdot}0000045 = 4{\cdot}5 \times 10^{-6}$$

$${\cdot}000000082 = 8{\cdot}2 \times 10^{-8}$$

இங்குத் தசமப் புள்ளி எத்தனை இடங்கள் வலது பக்கம் தள்ளி வைக்கப்பட்டுள்ளது என்பதையும், 10-ன் அடுக்கையும் கவனி.

ஒன்றைவிடப் பெரிய எண்களைக் குறிக்கும் போது 10-ன் அடுக்கு மிகை எண்ணாகவும், ஒன்றைவிடச் சிறிய எண்களைக் குறிக்கும் போது, 10-ன் அடுக்கு குறை எண்ணாகவும் இருப்பதைப் பார்க்கவும். (ஏன் ?)

பயிற்சி 3·3

(1) கீழ்வருவனவற்றை விஞ்ஞானக் குறியீட்டு முறையில் எழுதுக.

(a) 29,980,000,000
(ஒளியின் வேகம் — செகண்டிற்கு செ.மீ.களில்)

(b) 1,300,000,000
(பூமியின் விட்டம் — சென்டி மீட்டர்களில்)

(c) 1083,000,000,000
(பூமியின் கன அளவு — கன கிலோ மீட்டரில்)

(d) 37,960,000,000,000
(சந்திரனின் மேற்பரப்பு — சதுர மீட்டர்களில்)

(e) 9,463,000,000,000,000
(ஓர் ஒளி வருடம் — மீட்டர்களில்)

(f) 0·000,042
(ஊதா நிறக் கதிரின் அலை நீளம் — செ.மீ.களில்)

(g) 0·000000000016

(2) பின்வருவனவற்றைச் சாதாரண முறையில் எழுதுக.

(மாதிரி : $6{\cdot}49 \times 10^6 = 6490000$)

(a) $5{\cdot}37 \times 10^5$ (b) $2{\cdot}3 \times 10^8$

(c) $4{\cdot}97 \times 10^7$ (d) $3{\cdot}3 \times 10^{-4}$

(e) $1{\cdot}28 \times 10^{-8}$ (f) $2{\cdot}65 \times 10^{-5}$

(3) கீழ்க்கண்டவற்றை விஞ்ஞானக் குறியீட்டு முறையில் எழுதுக :

(மாதிரி : $724 \cdot 8 \times 10^7 = 7 \cdot 248 \times 10^9$)

(a) $35 \cdot 4 \times 10^6$ (b) $0 \cdot 3 \times 10^4$

(c) 428×10^5 (d) 65×10^{-2}

(e) $0 \cdot 007 \times 10^{-4}$ (f) $0 \cdot 028 \times 10^{-6}$

§4. வர்க்க (இருபடி) மூலம்—கன மூலம்

$9 = 3 \times 3$ என்பதால் 9-ன் வர்க்க மூலம் 3 என்றும், 9-ன் வர்க்க மூலம் $\sqrt{9}$ என எழுதுவோம் என்றும் உங்களுக்குத் தெரியும். $\sqrt{9}$ என்பதை நாம் $9^{\frac{1}{2}}$ என்றும் எழுதலாம். இங்ஙனமே $5^{\frac{1}{2}}$ என்றால் $\sqrt{5}$ என்று பொருள் படும்.

பொதுவில் $a^{\frac{1}{2}}$ என்பது $\sqrt{a}$ ஐக் குறிக்கும். $\sqrt{b}$ ஐ $b^{\frac{1}{2}}$ என்றும் எழுதுவது வழக்கம்.

இவ்வாறே, 8-ன் கன மூலத்தை $8^{\frac{1}{3}}$ என்று எழுதுவது வழக்கம். பொதுவில் $\sqrt[3]{a}$ ஐ $a^{\frac{1}{3}}$ என்றும் எழுதலாம். $a^{\frac{1}{3}}$ என்பது $\sqrt[3]{a}$ ஐக் குறிக்கும்.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \text{ என்பதை}$$

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a$$

என்று எழுதும்போது, அடுக்குக் குறி விதி 1, சரிப்பட்டு வருவதைக் காண்க. இவ்வாறே

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a \text{ என்பதை}$$

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a$$

என்று எழுதும் போதும் மேற்படி விதி சரியாகிறது.

$$\sqrt{a} \text{ ஐ } a^{\frac{1}{2}} \text{ என்றும், } \sqrt[3]{a} \text{ ஐ } a^{\frac{1}{3}}$$

என்றும் எழுதி வர ஒப்புக் கொண்டதற்கு இவையே காரணங்கள் (justifications).

பயிற்சி 3·4

பின் வருவனவற்றைக் கணிக்க.

(1) (i) $25^{\frac{1}{2}}$ (ii) $625^{\frac{1}{2}}$ (iii) $(5^4)^{\frac{1}{2}}$

(iv) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ (v) $\cdot 09^{\frac{1}{2}}$ (vi) $\left(1\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$

(vii) $(a^4 b^{16})^{\frac{1}{2}}$ (viii) $1\cdot 44^{\frac{1}{2}}$

(2) சுருக்குக.

(i) $16^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{2}}$ (ii) $16^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}}$ (iii) $(16+9)^{\frac{1}{2}}$

(iv) $(3 \times 5^{\frac{1}{2}}) + (7 \times 5^{\frac{1}{2}})$ (v) $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}$.

(3) பின்வருவனவற்றைக் கணிக்க.

(i) $27^{\frac{1}{3}}$ (ii) $(3^3)^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

(iv) $\cdot 064^{\frac{1}{3}}$ (v) $125^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{3}}$ (vi) $(125 \times 8)^{\frac{1}{3}}$

§ 5. விகிதமுறும் எண்களின் தனி மதிப்பு

ஓர் எண்ணின் தனி மதிப்பானது, அந்த எண், அந்த எண்ணின் எதிரெண் இவற்றுள் பெரியதற்குச் சமம். a என்ற எண்ணின் தனி மதிப்பை $|a|$ எனக் குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $|5| = 5$

(ii) $|-7| = 7$

(iii) $|8\frac{1}{2}| = 8\frac{1}{2}$

(iv) $|-6\frac{3}{4}| = 6\frac{3}{4}$

(v) $|0| = 0$

'a' ஒரு மிகை எண்ணாகவோ அன்றிப் பூச்சியமாகவோ இருந்தால், a-ன் தனி மதிப்பு a ஆகும். a ஒரு குறை எண்ணாக

இருப்பின், 'a'-ன் தனி மதிப்பு $-a$ ஆகும். இதையே குறியீட்டு மொழியில் கூறுவதாயின்,

$$a > 0 \text{ எனில் } |a| = a$$
$$a < 0 \text{ எனில் } |a| = -a.$$

பின்வரும் அட்டவணையைக் கவனி.

நிலை	a	b	$a \times b$	$\|a\|$	$\|b\|$	$\|a \times b\|$	$\|a\| \times \|b\|$
1.	+ 3	+ 4	+ 12	3	4	12	12
2.	+ 5	− 3	− 15	5	3	15	15
3.	+ 2	− 8	− 16	2	8	16	16
4.	− 6	− 7	42	6	7	42	42
5.	+ $2\frac{1}{2}$	+ 6	+ 15	$2\frac{1}{2}$	6	15	15
6.	+ $4\frac{1}{4}$	− 8	− 34	$4\frac{1}{4}$	8	34	34
7.	− 6·2	− 3·4	21·08	6·2	3·4	21·08	21·08
8.	+ 2	− 4·4	− 8·8	2	4·4	8.8	8·8
9.							
10.							
11.							
12.							

a, b இவற்றிற்கு மேலும் நான்கு நான்கு மதிப்புகள் கொடுத்து மேலுள்ள அட்டவணையைப் பூர்த்தி செய்.

அட்டவணையில் கடைசி இரண்டு நிலை வரிசைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க, a, b என்பன எந்த இரு விகிதமுறு எண்களாக இருப்பினும், $|a \times b| = |a| \times |b|$ என்பது எளிதில் விளங்குகிறதல்லவா ?

$b\ (b \neq 0)$ ஒரு விகிதமுறு எண் எனில், b-ன் தலை கீழியும் அதாவது $\frac{1}{b}$-ம் ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

$\frac{1}{b} = c$ என்க. அப்பொழுது $b = \frac{1}{c}$ ஆகுமல்லவா ? எனவே, $|a \times b| = |a| \times |b|$ என்ற முற்றொருமையில் b-க்குப் பதிலாக $\frac{1}{c}$ ஐப் பிரதியிட,

$$\left|a \times \frac{1}{c}\right| = |a| \times \left|\frac{1}{c}\right|$$ எனக் கிடைக்கும்.

$\frac{1}{c}$-ன் தலை கீழி c, $\left|\frac{1}{c}\right|$-ன் தலை கீழி $|c|$ ஆதலால்,

மேலுள்ளதை $\left|\frac{a}{c}\right| = \frac{|a|}{|c|}$ என எழுதலாம்.

எனவே, ஒரு விகிதமுறு எண்ணை மற்றொரு பூச்சியமல்லா விகிதமுறு எண்ணால் வகுக்கக் கிடைப்பதன் தனி மதிப்பானது, முதல் விகிதமுறு எண்ணின் தனி மதிப்பை, இரண்டாம் விகித முறு எண்ணின் தனி மதிப்பால் வகுக்கக் கிடைப்பதற்குச் சம மாகும்.

குறியீட்டு மொழியில், $a \in Q$, $b \in Q$, $b \neq 0$ எனில்,

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

அடுத்து இரு விகிதமுறு எண்களின் கூட்டுத் தொகையின் தனி மதிப்பை ஆராய்வோம். கீழுள்ள அட்டவணையை ஆராய்க:

நிலை	a	b	$a+b$	$\|a\|$	$\|b\|$	$\|a+b\|$	$\|a\|+\|b\|$
1.	$+3$	$+5$	$+8$	3	5	8	8
2.	$+3$	-5	-2	3	5	2	8
3.	$+8$	-4	$+4$	8	4	4	12
4.	-7	-9	-16	7	9	16	16
5.	$+4\frac{1}{4}$	$+6\frac{1}{2}$	$+10\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{2}$	$10\frac{3}{4}$	$10\frac{3}{4}$
6.	$+2\frac{3}{4}$	$-7\frac{3}{4}$	-5	$2\frac{3}{4}$	$7\frac{3}{4}$	5	$10\frac{1}{2}$
7.							
8.							
9.							
10.							

விகிதமுறும் எண்களின் கணத்திலிருந்து a, b இவற்றிற்கு மேலும் நான்கு நான்கு மதிப்புகளைக் கொடுத்து அட்டவணையைப் பூர்த்தி செய்து, கடைசி இரண்டு நிலை வரிசைகளை ஒப்பிட்டும் பார்க்கவும்.

$|a+b|$ ஆனது $|a|+|b|$-க்குச் சில சமயங்களில் சமமாகவும், சில சமயங்களில் குறைவாகவும் இருப்பதைக் காணலாம். வேறு விதமாகக் கூறுவதாயின் $|a+b|$ $|a|+|b|$ ஐ விட ஒரு பொழுதும் பெரிதல்ல.

குறியீட்டில் இதனை

$|a+b| \leq |a|+|b|$ என்று எழுதலாம்.

பயிற்சி 3·5

(1) சரியானபடி பூர்த்தி செய்க :

(i) $|(-4)| =$ (ii) $|7 \cdot 32| =$ (iii) $\left|\frac{1}{-5}\right| =$

(2) பின் வருவன மெய்யானவையா, அல்லவா என்று ஆராய்க.

(i) $|-3| < |-2|$ (ii) $|-5| \nless |-4|$

(iii) $|-3|^2 = 9$.

(3) $|-a| = a$ எனில், a ஒரு மிகை எண்ணு அல்லவா ?

(4) $|a-b| \leq |a|+|b|$ என்று காட்டுக.

(5) $|a-b| > |a|-|b|$ என்று காட்டுக.

(6) $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$ என்று நிரூபிக்க.

§ 6. ஐந்து, இரண்டு அடிமானங்கள் : கூட்டலும், பெருக்கலும் :

ஓர் எண்ணை ஐந்து (அல்லது இரண்டு) அடிமானத்தில் குறிப்பது எவ்விதம் என்பதை முன் வகுப்பில் படித்திருக்கிறீர்கள்.

எடுத்துக்காட்டு :

(i) $38 = 1 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3$ என்பதால்

$38 = 123$ ஐ

(ii) $19 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$ என்பதால்

$$19 = 10011_{இ}$$

இரண்டு அடிமான முறையில் 0, 1 என்ற இரு அடிப்படை இலக்கங்களே பயன்படுகின்றன. இவற்றிடையே கூட்டற் பலன்களை அடியில் அட்டவணைப் படுத்தியுள்ளது.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

கூட்டல் :

$101_{இ}$ ஐயும் $11_{இ}$ ஐயும் கூட்ட வேண்டும் என்க. பத்து அடிமான முறையில் செய்வதைப் போலவே இங்கும் செயல்படலாம். கூட்டல் செய்யும் போது மேலே கொடுத்துள்ள கூட்டல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்த வேண்டும். இங்கு முதல் $1 + 1 = 10$. எனவே, ஒன்றுகள் இடத்தில் பூச்சியத்தை எழுதுகிறோம். இரண்டுகள் இடத்தில் இப்போது $0 + 1 + 1$ இருப்பதால் கூட்டுத் தொகை 10 எனவே, இரண்டுகள் இடத்திலும் பூச்சியம் தருக. நான்குகள் இடத்தில் இப்போது $1 + 1$ இருப்பதால் கூட்டுத்தொகை 10. எனவே, விடை 1000.

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11 \\ \hline 1000 \\ \hline \end{array}$$

எடுத்துக்காட்டு :

$1011_{இ} + 1101_{இ}$ ஐக் கணக்கிடுக.

$$\begin{array}{r} 1011 \\ 1101 \\ \hline 11000 \\ \hline \end{array}$$

எடுத்துக்காட்டு :

$342_{ஐ} + 411_{ஐ}$ ஐக் கணக்கிடுக.

இங்கு ஐந்து அடிமான முறையின் அடிப்படைக் கூட்டல் அட்டவணையை முதலில் தயாரித்து வைத்துக் கொள்வது நல்லது. இது அடியில் தரப்பட்டுள்ளது.

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

இப்போது

3	4	$2_{ஐ}$
+ 4	1	$1_{ஐ}$
12	10	3

என்பதால்

$$\begin{array}{r} 342 \\ 411 \\ \hline 1303 \end{array}$$

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 2_{ஐ} \\ +\ 1\ 3\ 2_{ஐ} \\ \hline 3\ 0\ 4 \end{array}$$

பெருக்கல் :

ஐந்து அடிமான அடிப்படைப் பெருக்கல் அட்டவணையைக் கொண்டு ஐந்து அடிமான எண்களின் பெருக்கல்களைச் செய்யலாம். இங்கும் பத்து அடிமானப் பெருக்கல் முறை போலவே செயல்படுகிறோம்

அடிப்படைப் பெருக்கல் அட்டவணைகள்

(i) ஐந்து அடிமானம்

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

(ii) இரண்டு அடிமானம்

×	0	1
0	0	0
1	0	1

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$14_{\text{ஐ}} \times 3$ ஐக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

1	$4_{\text{ஐ}}$
	3
(3 + 2)	2

அதாவது $102_{\text{ஐ}}$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$323_{\text{ஐ}} \times 43_{\text{ஐ}}$ ஐக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

$$\begin{array}{r} 323_{\text{ஐ}} \\ 43_{\text{ஐ}} \\ \hline 2024\phantom{_{\text{ஐ}}} \\ 2402\phantom{0_{\text{ஐ}}} \\ \hline 31044_{\text{ஐ}} \\ \hline \end{array}$$

எடுத்துககாட்டு 3 :

$10101_{\text{இ}} \times 101_{\text{இ}}$ ஐக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

$$
\begin{array}{r}
10101_{\text{இ}} \\
101_{\text{இ}} \\
\hline
10101 \\
00000 \\
10101 \\
\hline
1101001_{\text{இ}} \\
\hline
\end{array}
$$

விடை : $1101001_{\text{இ}}$

பயிற்சி 3·6

(1) பின்வரும் கூட்டல்களைச் செய்க.

(a) $3342_{\text{ஐ}} + 1232_{\text{ஐ}}$

(b) $212_{\text{ஐ}} + 310_{\text{ஐ}} + 144_{\text{ஐ}}$

(c) $1110_{\text{இ}} + 1001_{\text{இ}}$

(d) $10101_{\text{இ}} + 1010_{\text{இ}}$

(2) பெருக்கி விடையளிக்கவும்.

(a) $142_{\text{ஐ}} \times 31_{\text{ஐ}}$

(b) $3004_{\text{ஐ}} \times 203_{\text{ஐ}}$

(c) $1110_{\text{இ}} \times 1001_{\text{இ}}$

(d) $10101_{\text{இ}} \times 111_{\text{இ}}$

(3) (a) $4444_{\text{ஐ}}$-ன் தொடரியை எழுதுக.

(b) $1111_{\text{இ}}$-ன் தொடரியை எழுது.

(c) $4443_{\text{ஐ}}$-ன் முன்னியைக் கூறு.

(d) $1110_{\text{இ}}$-ன் முன்னியைக் கூறு.

(4) 'கன்' என்ற பழங்குடி மக்கள் 1 ஐக் குறிக்க ⊢ என்ற குறியையும், 2 ஐக் குறிக்க) என்ற குறியையும் உபயோகப்படுத்து கின்றனர். 5 ஐ)) ⊢ என்றும், 6 ஐ))) என்றும் குறித்தால் பின்வரும் எண்களை அவர்கள் எவ்வாறு குறிப்பார்கள் ?

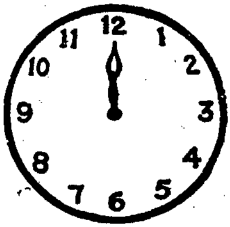
(a) (i) மூன்று (ii) ஏழு (iii) எட்டு.

(b) இப் பழங்குடி மக்கள் பயன்படுத்தும் முறையில் இரண்டே குறிகள் உள்ளன. இரண்டடிமான முறையினத்திலும் இரண்டே குறிகள்தாம் உள்ளன. இருப்பினும் இரு முறைகளுக்கும் ஒரு முக்கியமான வேறுபாடு உள்ளது. அது யாது ?

§7. முடிவுறு எண் கணிதம் (Finite Arithmetic)

பக்கத்தில் உள்ள கடிகாரத்தின் படத்தில் ஒரே ஒரு முள் (சிறிய முள்) மாத்திரம் இருப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம்.

முள்ளை முதலில் இரண்டு இடைவெளிகள் நகர்த்து. முள் இப்பொழுது 2 ஐக் காட்டும். பிறகு மேலும் 5 இடைவெளிகள் நகர்த்து. முள் இப்பொழுது 7 ஐக் காட்டுமல்லவா ? இதை $2 + 5 = 7$ எனக் குறிப்போம்.



படம் 3-1.

இவ்விதமாகக் ''கூட்டு'' என்பதற்கு ''வலஞ் சுழியாக நகர்த்து'' எனப் பொருள் கொண்டால்

$11 + 4 = 3$ என்றும்

$10 + 7 = 5$ என்றும் கூறலாமல்லவா ?

இதன் பொருள், '' இப்போது மணி 10 ; இன்னும் 7 மணி நேரம் கழித்து மணி 5.'' என்பதே. இவ்விதம் அமைந்துள்ள 1, 2, ..., 12 என்ற எண்கள் கடிகார எண்கள் எனப்படும்.

பயிற்சி 3·7

(1) கீழுள்ள கூட்டல் அட்டவணையை நிரப்புக.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2											
2		4										
3			6									
4			7									
5												
6												
7												
8									5			
9												
10					3					8		
11											10	
12	1											12

(2) நிரப்பிய அட்டவணையைக் கொண்டு பின்வரும் கடிகார எண்கள் கூட்டலைக் கணிக்க.

(a) $3 + 8$ (b) $8 + 3$

(c) $8 + 7$ (d) $7 + 8$

(e) $7 + 4$ (f) $(8 + 7) + 4$

(g) $8 + (7 + 4)$ (h) $5 + 12$

(3) பின்வரும் 'கடிகார எண்கள்' கழித்தலைச் செய்க.

(a) $8 - 2$ (b) $2 - 8$

(c) $10 - 3$ (d) $3 - 10$

(e) $8 - 4$ (f) $4 - 8$

(g) $6 - 9$ (h) $1 - 4$

(4) (a) எந்த இரண்டு கடிகார எண்களைக் கூட்டினாலும் ஒரு கடிகார எண் கிடைக்குமா ?

(b) கடிகார எண்கள் கூட்டலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளதா ?

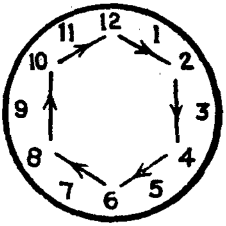
(c) கடிகார எண்கள் கழித்தலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளதா ?

§8. கடிகார எண்களில் பெருக்கல்

பெருக்கலைக் கூட்டலின் சுருக்கம் எனக் கருதலாமல்லவா ?

(a) இரண்டிரண்டாகக் கூட்ட

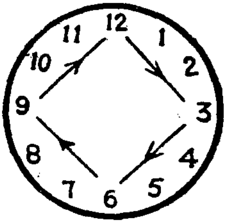
2, 4, 6, 8, 10, 12,
2, 4, 6, 8 ...



படம் 3-2.

(b) மூன்று மூன்றாகக் கூட்ட

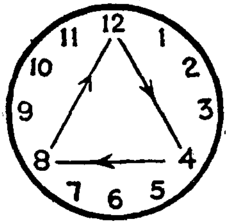
3, 6, 9, 12, 3, 6, 9, 12 ...



படம் 3-3.

(c) நான்கு நான்காகக் கூட்ட

4, 8, 12, 4, 8, 12 ...



படம் 3-4.

இவ்வாறு செயல்பட்டு, அடியிற்கண்ட பெருக்கல் அட்டவணையை நிரப்புக.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												

பயிற்சி 3·8

(1) கடிகார எண்களில்

(a) ஆறு ஆறாகக் கூட்ட வரும் தொடரினை

(b) எட்டு எட்டாகக் கூட்ட வரும் தொடரினை

(c) ஐந்து ஐந்தாகக் கூட்ட வரும் தொடரினை

(d) ஏழு ஏழாகக் கூட்ட வரும் தொடரினை
எழுது.

(2) உன் நோட்டுப் புத்தகத்தில் 6 செ.மீ. ஆர அளவுகளுள்ள மூன்று வட்டங்கள் வரை. அவற்றில் கடிகாரத்தில் உள்ளது போல 12 எண்களையும் குறி. முதல் கணக்கில் உள்ள மூன்று பிரிவுகளின் கோலங்களைப் படங்களில் வரைக.

(3) இரண்டாம் வாய்பாட்டில் பெருக்கல் பலன்கள் 2, 4, 6, 8, 10, 12 என ஆறு வெவ்வேறு எண்களே வருகின்றன.

(a) மூன்றாம் வாய்பாட்டில்

(b) நான்காம் வாய்பாட்டில்

(c) ஆறாம் வாய்பாட்டில்
பெருக்கல் பலன்களில் எத்தனை வெவ்வேறு எண்கள் வருகின்றன ?

(d) இவற்றிலிருந்து நீ ஏதேனும் ஊகிக்க முடியுமா ?

(4) ஐந்தாம் வாய்பாட்டின் பெருக்கல் பலன்களில் எத்தனை வெவ்வேறு எண்கள் வரும்? காரணம் கூறு.

(5) (a) மூன்றும் வாய்பாட்டின் பெருக்கல் பலன்களில் வரும் எண்களையும், ஒன்பதாம் வாய்பாட்டின் பெருக்கல் பலன்களில் வரும் எண்களையும் ஒப்பிட்டுப் பார்.

(b) இதேபோல், நான்காம், எட்டாம் வாய்பாடு களையும் ஒப்பிட்டுப் பார்.

(c) இவற்றிலிருந்து நீ என்ன ஊகிக்க முடியும்?

(6) கடிகார எண்களின் கணத்தில் கூட்டல் சமனி யாது? கடிகார எண்களின் கணத்தில் 12 கூட்டல் சமனியாதலால்

$$12 \times 1 = 12$$

$$12 \times 2 = 12 + 12 = 12$$

$$12 \times 3 = 12 + 12 + 12 = 12$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$12 \times 12 = 12.$$

இதனால், கடிகார எண்களில் கணத்தில் 12-க்குப் பதில் 0 என எடுத்துக் கொண்டாலும் கூட்டல், பெருக்கல் அட்டவணைகள் அதே அமைப்பைப் பெற்றுள்ளமை கவனிக்கவும். இதனால் கடிகார எண்களின் கணத்தை $\{0, 1, 2, \ldots 11\}$ என்று விவரிக்கலாம். இதனை Z_{12} என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

(7) பன்னிரண்டு அடிமானத்தில் 12 குறிகள் இருக்க வேண்டுமல்லவா? 0 முதல் 9 முடிய உள்ள பத்து குறிகளுடன் பத்தைக் குறிக்க 't' ஐயும், பதினொன்றைக் குறிக்க 'e' ஐயும் வைத்துக் கொள்வோம். கீழேயுள்ள ஒவ்வொன்றிற்கும் அடுத்த 10 எண்களைத் தருக.

W (பத்து அடிமானத்தில்) :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 ...

W (பன்னிரண்டு அடிமானத்தில்)

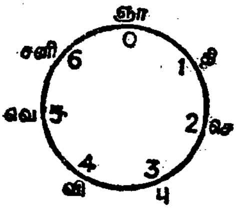
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 t e 10 11 12 ...

Z_{12} (கடிகார எண்கள்)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 0 1 2 ...

§ 9. நாட்காட்டி கணிதம் (Calendar Arithmetic)

வாரத்தின் கிழமைகளின் கணம் நமக்கு அறிவுறுத்தும் மற்றொரு முடிவுறு எண் அமைப்பைப் பார்ப்போம்.



படம் 3-5.

எளிதாக இருக்கும் பொருட்டு ஞாயிறு ↔ 0, திங்கள் ↔ 1, செவ்வாய் ↔ 2, புதன் ↔ 3, வியாழன் ↔ 4, வெள்ளி ↔ 5, சனி ↔ 6 என வைத்துக் கொள்வோம்.

வியாழக் கிழமை கிளம்பி ஐந்து நாள்கள் பயணம் செய்து நீ செல்ல வேண்டிய ஊரை அடைகிறாய் என்றால், என்று அவ்வூரை அடைவாய்? நாட்காட்டியில் வியாழக் கிழமையிலிருந்து ஐந்து நாள்கள் எண்ணுக. செவ்வாய்க்கிழமை செல்ல வேண்டிய ஊரை அடைவாய் என்று காண்பாய்.

இதை நாம் $4 + 5 = 2$ எனக் குறிக்கலாம்.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற ஏழு எண்களை மாத்திரம் கொண்ட முடிவுறு கணத்தை நாட்காட்டி எண்கள் கணம் எனப் பெயரிடுவோம்.

இதோ சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$2 + 4 = 6 \; ; \quad 3 + 6 = 2$$

பயிற்சி 3·9

(1) கீழுள்ள நாட்காட்டி எண்கள் கூட்டல் அட்டவணையை நிரப்பு :

+	0	1	2	3	4	5	6
1							
2						0	
3							
4					1		
5							
6							5

இனி { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 } என்ற கணத்தை Z_7 என குறிப்போம்.

(2) அட்டவணையைக் கொண்டு பின் வரும் கூட்டல்களைச் செய்க :

(a) $3 + 5$ (b) $5 + 3$ (c) $5 + 4$

(d) $(3 + 5) + 4$ (e) $3 + (5 + 4)$ (f) $4 + 0$

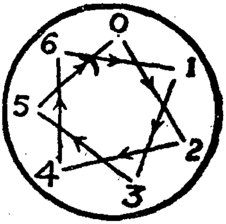
(3) (a) Z_7 கூட்டலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளதா?

(b) Z_7 கழித்தலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளதா?

நாட்காட்டி எண்களில் பெருக்கல்

இரண்டிரண்டாகக் கூட்ட

0 2 4 6 1 3 5 0 2 ...



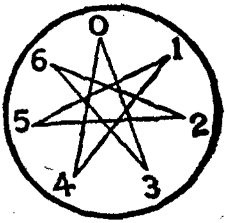
படம் 3-6.

மூன்று மூன்றாகக் கூட்ட

0 3 6 2 5 1 4 0 3 ...

நான்கு நான்காகக் கூட்ட

0 4 1 5 2 6 3 0 4 ...



படம் 3-7.

பயிற்சி 3·10

(1) நாட்காட்டி எண்களில்

(a) ஐந்து ஐந்தாக

(b) ஆறு ஆறாக

கூட்ட வரும் தொடரினை எழுதுக

(2) உன் நோட்டுப் புத்தகத்தில் 6 செ.மீ. ஆர அளவுகள் உள்ள மூன்று வட்டங்கள் வரைந்து அவற்றில் கீழ் வருவன வற்றின் கோலங்களை வரைக.

(a) மூன்று மூன்றாகக் கூட்ட வரும் தொடர்.

(b) நான்கு நான்காகக் கூட்ட வரும் தொடர்.

(c) ஐந்து ஐந்தாகக் கூட்ட வரும் தொடர்.

(3) Z_7-க்கான அடியிற் கண்ட பெருக்கல் அட்டவணையை நிரப்புக.

×	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

(4) கீழேயுள்ள ஒவ்வொன்றிற்கும் அடுத்த 8 எண்களைத் தருக.

W (பத்து அடிமானத்தில்)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...

W (ஏழு அடிமானத்தில்)

0 1 2 3 4 5 6 10 11 12 ...

Z_7 (நாட்காட்டி எண்கள்)

0 1 2 3 4 5 6 0 1 2 ...

4. மெய்யெண் கணம்

[Real Number (R)]

§ 1. மீள் பார்வை : ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணையும் தசம பின்னமாக எழுத முடியும். அவ்வாறு கிடைக்கும் தசம பின்னங்கள் முடிவுற்றவை (terminating) யாகவோ, அல்லது முடிவுறாதன வாகவோ (non-terminating) இருக்கலாம். முடிவுறாதனவாக இருந்தால், அவை சுழல் தன்மை கொண்டனவாக (periodic) இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $\frac{4}{25} = \cdot 16$, $\frac{163}{40} = 4 \cdot 075$ என்பன முடிவுற்ற தசம பின்னங்களால் குறிக்கப்படும் விகிதமுறு எண்கள்.

(ii) $\frac{1}{3} = \cdot \dot{3}$, $\frac{15}{17} = \cdot \dot{8}82352941176470\dot{5}$,

$$\frac{38}{7} = 5 \cdot \dot{4}2857\dot{1}$$

என்பன, சுழல் தசம பின்னங்களால் குறிக்கப்படும் விகிதமுறு எண்கள்.

ஒவ்வொரு முடிவுறு தசம பின்னமும், ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் குறிக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக $\cdot 7493$ என்பது $\frac{7493}{10000}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணையும், $18 \cdot 84$ என்பது $\frac{1884}{100}$, அதாவது $\frac{471}{25}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணையும் குறிக்கும்.

ஒவ்வொரு சுழல் தசம பின்னமும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

$\cdot \dot{3}85714\dot{2}$ குறிக்கும் எண்ணை இரு முழு எண்களின் விகிதமாகக் காண்க :

$$\cdot \dot{3}85714\dot{2} = x \text{ என்க.}$$

$$3 \cdot \dot{8}5714\dot{2} = 10x$$

$$3857142\cdot\dot{8}5714\dot{2} = 10^6 \times 10x = 10^7 x$$

$$3857139 = 10^7 x - 10x$$

$$= (10^7 - 10)x$$

$$= 9999990\,x$$

$$\therefore\ x = \frac{3857139}{9999990} = \frac{27}{70}$$

§2. சுழல் தன்மையற்ற முடிவுறுத் தசம பின்னங்கள் எவ்வித எண்களைக் குறிக்கும் என்ற கேள்வி இப்போது எழுகிறது. இவை நிச்சயமாக விகிதமுறு எண்களாக இருக்கமுடியாது. ஆகவே, இவை ஒரு புதியவகை எண்களாக இருத்தல் வேண்டும். இத்தகைய எண்களை விகிதமுறு எண்கள் (irrational numbers) என்று குறிப்பிடுவோம். சுழல் தன்மையற்ற முடிவுறுத் தசம பின்னம் ஒவ்வொன்றும், ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணைக் குறிக்கும்.

விகிதமுறு எண்கள் வழக்கில் நமக்கு மிகவும் தேவையானவையே. எடுத்துக்காட்டாக 2-ன் வர்க்கமூலம், 5-ன் கனமூலம் போன்ற எண்கள் பயன்முறை வடிவ கணிதத்தில் தேவைப்படுகின்றன. 2 ச.செ.மீ பரப்பளவு கொண்ட சதுரத்தின் பக்க அளவு என்ன ? 5 கன செ.மீ. கொள்ளளவு கொண்ட ஒரு கனச் சதுரத்தின் பக்க அளவு என்ன ?

இவை போன்ற கேள்விகளுக்கு விடை காண முயலும் போது, 2-ன் வர்க்க மூலம், 5-ன் கன மூலம் ஆகிய எண்களைக் காண வேண்டியுள்ளது. இத்தகைய எண்கள் விகிதமுறு எண்களாக அமைவதில்லை.

1·96 ச.செ.மீ பரப்பளவு கொண்டுள்ள சதுரத்தின் பக்கம் 1·4 செ.மீ.

1·9881 ச.செ.மீ பரப்பளவு கொண்டுள்ள சதுரத்தின் பக்கம் 1·41 செ.மீ.

1·999396 ச.செ.மீ பரப்பளவு கொண்டுள்ள சதுரத்தின் பக்கம் 1·414 செ.மீ.

ஆயினும் 2 ச.செ.மீ பரப்பளவு கொண்டுள்ள சதுரத்தின் பக்கம் என்ன என்பது இவ்விதம் செய்து கொண்டே போவதால்

முடிவதாகத் தெரியவில்லை. எனவே, $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறு எண்ணல்லவோ என்று ஐயம் ஏற்படுகிறது. இப்போது $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறு எண் என்று நிரூபித்துவிடுவோம்.

தேற்றம்:

$\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்.

நிருபணம்:

$\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண் அல்ல எனக் கொள்வோம்.

அப்போது அது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகத்தான் இருக்க வேண்டும்.

[எந்த ஒரு விகித முறு எண்ணையும் $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவத்தில் கூறமுடியும் என முன்பே நீங்கள் படித்ததை நினைவுபடுத்திக் கொள்க.]

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ எனக. ($\frac{p}{q}$ என்பது சுருங்கிய வடிவில் இருக்கட்டும். அதாவது, pக்கும் qக்கும் பொது வகு எண் இல்லை.)

$\therefore 2 = \frac{p^2}{q^2}$

$p^2 = 2q^2$

$2q^2$ ஆனது, 2ஆல் வகுபடும்.

எனவே, p^2 உம் 2ஆல் வகுபடும்.

எனவே, p உம் 2ஆல் வகுபடும்.

$p = 2m$ எனக.

அப்போது $p^2 = (2m)^2 = 4m^2$

$p^2 = 2q^2$

எனவே, $2q^2 = 4m^2$

$q^2 = 2m^2$

$2m^2$ ஆனது 2ஆல் வகுபடும்.

எனவே, q^2 உம் 2ஆல் வகுபடும்.

எனவே, q உம் 2ஆல் வகுபடும்.

அதாவது, p க்கும் q க்கும் பொதுவகுஎண் '2' உள்ளது. இது எடுத்துக்கொண்ட கொள்கைக்கு, அதாவது p க்கும் q க்கும் பொதுவகுஎண் இல்லை என்ற கொள்கைக்கு முரணாக உள்ளது.

எனவே, $\sqrt{2}$ ஒரு விகித முறு எண் அல்ல எனக் கொள்வது தவறாகும்.

$\therefore \sqrt{2}$ ஒரு விகித முறு எண் ஆகும்.

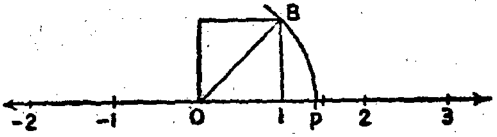
$\sqrt{2}$ ஐப் போலவே, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ என்பனவும் விகிதமுறு எண்கள் என நிரூபிக்கலாம். பொதுவில், n என்பது ஒரு வர்க்க முழு எண்ணல்ல எனில், $\sqrt{n}$ ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும். $\sqrt{10}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{28}$ போன்றவையும் விகிதமுறு எண்களே.

ஒரு வட்டத்தின் பரிதியின் நீளம், அதன் விட்டத்தின் நீளத்தைப்போல் π மடங்கு என்பது உங்களுக்குத் தெரியும். π என்பதும் ஒரு விகிதமுறு எண்தான்.

$\frac{22}{7}$, 3.14, 3·1416, $\frac{355}{113}$ என்பன, π-ன் தோராய மதிப்புகளே. இவை எதுவும் π-க்குச் சமமல்ல. (1·4, 1·41, 1·414 என்பன $\sqrt{2}$-ன் தோராய மதிப்புகளே தவிர, $\sqrt{2}$-க்குச் சமமான எண்களாகா அல்லவா? அதுபோல). பதினொன்கு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாக π-ன் மதிப்பு 3·14159265358979.

§ 3. எண் கோட்டில் $\sqrt{2}$-ன் இடம்

எண் கோட்டில் (0, 1) என்ற கோட்டுத் துண்டைப் பக்கமாகவுடைய ஒரு சதுரம் வரை. படத்தில் காட்டியபடி, O-வை மையமாகவும், OB ஐ ஆரமாகவும் உடைய வட்ட வில் வரை. அது எண் கோட்டை P-ல் வெட்டுகிறதெனில், P என்ற புள்ளி $\sqrt{2}$ ஐக் குறிக்கும்.



படம் 4-1.

நிரூபணம் :

வரைந்துள்ள சதுரத்தின் பக்க அளவு 1 அலகாதலால், பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, மூலை விட்டம் OB, $\sqrt{2}$ அலகாகும். ஆகவே, P என்ற புள்ளி $\sqrt{2}$ ஐக் குறிக்கும்.

§4. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ போன்ற விகிதமுறா எண்களைத் தோராய விகிதமுறு எண்களால் குறித்தல் :

$\sqrt{2}$-ன் தோராய மதிப்பு :

தோராயங்கள்

(1) முதல் தோராயமாக, 2-க்குப் பக்கமாக உள்ள வர்க்க எண்ணின் வர்க்க மூலத்தை எடுத்துக் கொள்.

$$1$$

(2) 2 ஐ 1ஆல் வகுத்துவரும் ஈவு, முதல் தோராயம் இவற்றின் சராசரியே இரண்டாவது தோராயமாகும்.

$$\frac{1+\frac{2}{1}}{2} = 1\cdot5$$

(3) மறுபடியும், 2 ஐ இப்பொழுது கிடைத்த இரண்டாவது சராசரியால் வகுத்து வரும் ஈவிற்கும், 2 ஆவது தோராயத்திற்கும் இரு தசம இடத்திற்குச் சராசரி கண்டு பிடி. (ஏனெனில் $1^2 = 1$, $1\cdot5^2 = 2\cdot25$, ஆகவே, $\sqrt{2}$ என்பது 1, 1·5 இவற்றிற்கிடையில் அமையும்.)

$$\frac{\frac{2}{1.5}+1\cdot5}{2} = \frac{4\cdot25}{3} = 1\cdot41$$

(4) மறுபடியும் 2 ஐ 1·41 ஆல் வகுத்து வரும் ஈவு, மூன்றாவது தோராயம், இவற்றின் சராசரி (மூன்று தசம இடத்திற்கு) கண்டுபிடி.

$$\frac{\frac{2}{1\cdot41}+1\cdot41}{2} = \frac{1\cdot418+1.41}{2} = 1\cdot414.$$

(5) மேற்கூறியபடியே, மறுபடியும் கணக்கிட, கிடைக்கும் 5 ஆவது தோராயம்.

$$\frac{\frac{2}{1\cdot414}+1\cdot414}{2} = 1.4142.$$

இப்பொழுது, 2-க்கும், 1·4142-ன் வர்க்கத்திற்குமுள்ள வித்தியாசம்

$$= 2 - 1\cdot99996164$$
$$= \cdot00003836$$

இவ்வாறே, நமக்கு எவ்வளவு தசம இட சுத்தமாக விடை தேவையோ, அவ்வளவு தூரம் தோராய மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

மேற் கூறியவாறே $\sqrt{3}$-ன் தோராய மதிப்பையும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$\sqrt{3}$-ன் தோராய மதிப்பு :

	தோராயங்கள்
(1) முதல் தோராயம்	2
(2) இரண்டாவது தோராயம் (முதல் தசம இடத்திற்கு)	$\dfrac{\frac{3}{2}+2}{2} = 1{\cdot}7$
(3) மூன்றாவது தோராயம்	$\dfrac{\frac{3}{1\cdot7}+1{\cdot}7}{2}$ $= \dfrac{5{\cdot}89}{3{\cdot}4} = 1{\cdot}73$
(4) நான்காவது தோராயம்	$\dfrac{\frac{3}{1\cdot73}+1{\cdot}73}{2}$ $= \dfrac{5{\cdot}9929}{3{\cdot}46} = 1{\cdot}732$
(5) ஐந்தாவது தோராயம்	$\dfrac{\frac{3}{1\cdot732}+1{\cdot}732}{2}$ $= \dfrac{5{\cdot}999824}{2}$ $= 1{\cdot}7321$

இதேபோல், நமக்கு எத்தனை தசம இடத்திருத்தமாக விடை தேவையோ, அத்தனை இடத்திற்குக் கண்டுபிடிக்கலாம். 1·7321-ன் வர்க்கம், 3-லிருந்து ·00017041 வித்தியாசப்படுகிறது.

§ 5. மிகை எண்கள் வர்க்க எண்களாயிருப்பின், அவற்றின் வர்க்க மூலங்கள் விகிதமுறு எண்களாக இருக்கும். மிகையெண்கள் வர்க்க எண்களாக இல்லாமலிருப்பின், அவற்றின் வர்க்க மூலங்கள் விகிதமுறு எண்களாகா.

இயலாது. இதற்கு π ஓர் எடுத்துக்காட்டு. π^2, π^3, π^4 ... அனைத்துமே விகிதமுறு எண்கள். ஆனால் இவை, எந்த விகிதமுறு எண்ணினுடைய எந்தப் படியைப் பொறுத்த மூலமுமாகா. விகிதமுறு எண்கள், விகிதமுறு எண்கள் என்ற இவ்விரண்டு கணங்களின் சேர்ப்புக் கணத்தை, மெய்யெண்களின் கணம் என்போம். இதனை $\mathbb{R}$ என்று குறிப்போம்.

$a \in Q$, $a > 0$, எனில், $\sqrt{a} \in Q$ என்று எந் நிலையிலும் கூற முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக, $2 \in Q$, $2 > 0$ ஆனால், $\sqrt{2} \notin Q$.

$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ எனில், $\sqrt{a} \in \mathbb{R}$ என்பதைக் காண்க. இங்கு a-க்கு இரு வர்க்க மூலங்கள் உள்ளன. அவற்றிலொன்று மிகை யெண், மற்றது குறையெண். a-ன் மிகை வர்க்க மூலத்தையே $\sqrt{a}$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, 4-ன் வர்க்க மூலம், 2, -2 ஆகும் ஏனெனில், $2 \times 2 = 4$, $-2 \times -2 = 4$. இதேபோல், 2-ன் வர்க்க மூலம், மூன்று தசம இடத்திருத்தமாக $1{\cdot}414$, $-1{\cdot}414$ ஆகும். இதேபோல் தசம எண் உருவாகவோ, பின்ன உருவாகவோ இருப்பினும் அவ்வெண்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் இரு வர்க்க மூலங்கள் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு :

i. $\sqrt{4} = 2$

$-\sqrt{4} = -2$

ii. $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$, $-\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$.

§ 6. வர்க்க மூலங்களின் பெருக்கல் பலன்களின் பண்பு

(1) $a > 0$, $b > 0$ என்றால், $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}$

நிருபணம் :

$$(\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2\,.\,(\sqrt{b})^2$$
$$= a\,.\,b$$

இரு புறங்களிலும் மிகையெண் வர்க்க மூலங்களையெடுத்தால்,

$$\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

இதேபோல் $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ என்று காட்டலாம்.

(2) $\sqrt{a+o} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ என்று காட்டுக.

இதற்கு ஒரு மறுப்பு எடுத்துக்காட்டு தந்தால் போது மல்லவா ?

$a = 16, \quad b = 9$ என்று கொள்க.

$\sqrt{a+b} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

எனவே, பொதுவில் $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(3) $a > 0$ எனில், $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ என்று காட்டுக.

நிரூபணம் :

$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}.$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\sqrt{2} = 1 \cdot 414$ எனில், $\sqrt{32}$ -ன் மதிப்பென்ன ?

$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{4^2} \times 2 = 4 \times \sqrt{2}$

$= 4 \times 1 \cdot 414 = 5 \cdot 656.$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\sqrt{5} = 2 \cdot 236$, $\sqrt{2} = 1 \cdot 414$ எனில், $\sqrt{90}$ -ன் மதிப் பென்ன ?

$\sqrt{90} = \sqrt{9 \times 10} = \sqrt{3^2 \times 10} = 3\sqrt{10} = 3\sqrt{2 \times 5}$

$= 3\sqrt{2} \times \sqrt{5}$

$= 3 \times 1 \cdot 414 \times 2 \cdot 236$

$= 9 \cdot 485112.$

பயிற்சி 4·1

(1) $\sqrt{7} = 2 \cdot 646$ எனில், $\sqrt{28}, \sqrt{63}, \sqrt{175}$ -ன் மதிப் பைக் கணக்கிடுக.

(2) $\sqrt{5} = 2 \cdot 236$ எனில், $\sqrt{125}, \sqrt{20}, \sqrt{245}$ -ன் மதிப் பைக் கணக்கிடுக.

(3) $\sqrt{2} = 1{\cdot}414$, $\sqrt{3} = 1{\cdot}732$ எனில், $\sqrt{6}$, $\sqrt{24}$, $\sqrt{486}$ -ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(4) $\sqrt{2} = 1{\cdot}414$, $\sqrt{5} = 2{\cdot}236$ எனில், $\sqrt{\cdot 4}$, $\sqrt{2{\cdot}5}$, $\sqrt{302{\cdot}5}$ -ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(5) (i) $\sqrt{a+b^2} = \sqrt{a} + b$ என்பது மெய்யானதா?

(ii) $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$,, ,,

(iii) $\sqrt{\dfrac{a+b}{c}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$,, ,,

(iv) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$,, ,,

ஒவ்வொன்றும் மெய்யானதெனில் நிரூபணம் தருக. மெய் யற்றதெனில் மறுப்பு உதாரணம் தருக.

(6) சுருக்குக :

(i) $\dfrac{\sqrt{18}}{3\sqrt{2}}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{28}}$ (iii) $\dfrac{\sqrt{333}}{\sqrt{148}}$

§ 7. மெய்யெண்களின் தனி மதிப்பு (Absolute Value in Real Numbers)

முன்பே விகிதமுறு எண்களில் | | என்ற குறியை, தனி மதிப்புக் குறியாக உபயோகித்து அதன் மூலம் சில பண்புகளைப் படித்திருப்பீர்கள். அதாவது,

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$
$$|a/b| = |a| / |b|$$
$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$
$$|a-b| \geqslant |a| - |b|$$

இப் பண்புகள் யாவும் மெய்யெண்களுக்கும் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$|-\sqrt{2} \times -\sqrt{3}| = |\sqrt{6}| = \sqrt{6}$$
$$|-\sqrt{2}| \times |-\sqrt{3}| = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right| = \left|-\sqrt{\frac{3}{2}}\right|$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$\frac{|\sqrt{3}|}{|-\sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

பயிற்சி 4·2

I. கீழே கொடுத்துள்ளவை ஒவ்வொன்றும், மெய்யானதா, மெய்யற்றதா என்று ஆராய்க.

(1) $|2| = 2$ (2) $|8| > |-8|$

(3) $-\sqrt{3} < |-\sqrt{3}|$

(4) $\sqrt{6} > |-\sqrt{3}| \times |\sqrt{2}|$

(5) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{|-\sqrt{3}|}{|2|}$ (6) $-\sqrt{12} = |\sqrt{12}|$

(7) $\cdot 010010001 \ldots > |-\cdot 010010001 \ldots|$

(8) $-|-0\cdot 424422444 \ldots| \geqslant 0\cdot 424422444 \ldots$

II. பின் வருவனவற்றின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(1) $|\sqrt{48}| \times |-\sqrt{3}|$ (2) $\dfrac{|-\sqrt{48}|}{\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{-|\sqrt{48}|}{|-\sqrt{3}|}$

(4) $(|\sqrt{96} + \sqrt{72}|) \div (|-\sqrt{72} + \sqrt{96}|)$

§ 8. அடைப்பு எண்ணுருக்கள் (Bracketed Numerals)

x என்பது ஒரு மிகை மெய்யெண்ணுனால், $[x]$ என்பது x ஐ விடப் பெரிதாகாத, முழு எண்களுள், மிகப் பெரிய முழு எண்ணைக் குறிக்கும்.

பொதுவாக, அடைப்பு எண்ணுருக்களைக் குறிக்க அடைப்புகளையே உபயோகிக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$[5 \cdot 3] = 5, \quad [\sqrt{3}] = [1 \cdot 732 \ldots] = 1$$

$$[16] = 16.$$

பயிற்சி 4·3

கீழே கொடுத்துள்ள அடைப்பு எண்ணுருக்களின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(1) $[4 \cdot 54]$ (2) $[\sqrt{37}]$ (3) $[\pi]$

(4) $[99 \cdot 99]$ (5) $[10 \cdot 00001]$ (6) $[\pi^2]$

மெய்யெண்களின் தனி மதிப்பின், பண்புகளைக் கண்டு பிடித்தாற்போலவே, இப்பொழுது அடைப்பு எண்ணுருக்களின் சில பண்புகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$[4 \cdot 72 + 8 \cdot 95]$-ன் மதிப்பு என்ன ?

தீர்வு : $[4 \cdot 72 + 8 \cdot 95] = [13 \cdot 67] = 13.$

ஆனால், $[4 \cdot 72] + [8 \cdot 95] = 4 + 8 = 12.$

இங்கு $[4 \cdot 72 + 8 \cdot 95] > [4 \cdot 72] + [8 \cdot 95]$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$[3 \cdot 1 + 4 \cdot 4] = [7 \cdot 5] = 7$$

$$[3 \cdot 1] + [4 \cdot 4] = 3 + 4 = 7.$$

இங்கு $[3 \cdot 1 + 4 \cdot 4] = [3 \cdot 1] + [4 \cdot 4]$

பொதுவில் x, y என்பன மிகை யெண்கள் எனில்,

$$x = a + k \qquad 0 < k < 1, \quad a \in W$$

$$y = b + l \qquad 0 < l < 1, \quad b \in W$$

என்று எழுத முடியும். அப்போது,

$$[x] + [y] = a + b$$

$$x + y = a + k + b + l = (a + b) + (k + l)$$

$0 < k + l < 2$ என்பது நிச்சயம்.

$k + l < 1$ எனில் $[x + y] = a + b = [x] + [y]$

$k + l > 1$ எனில் $[x + y] = a + b + 1$

$= [x] + [y] + 1$

ஆகவே, பொதுவில் $[x + y] > [x] + [y]$

இதேபோல் பெருக்கல் பலனின் அடைப்பு எண்ணுருவும், அடைப்பு எண்ணுருக்களின் பெருக்கல் பலனும் எவ்வாறு உள்ளனவென்றும் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$[4 \cdot 2] \times [3 \cdot 4] = 4 \times 3 = 12$$

$$[4 \cdot 2 \times 3 \cdot 4] = [14 \cdot 28] = 14$$

இங்கு $[4 \cdot 2 \times 3 \cdot 4] > [4 \cdot 2] \times [3 \cdot 4]$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$[4 \cdot 1] \times [3 \cdot 1] = 4 \times 3 = 12$$

$$[4 \cdot 1 \times 3 \cdot 1] = [12 \cdot 71] = 12$$

இங்கு $[4 \cdot 1 \times 3 \cdot 1] = [4 \cdot 1] \times [3 \cdot 1]$

தேற்றம் :

$$[x\ y] > [x]\ [y]$$

நிருபணம் :

$x = a + k, \quad 0 < k < 1, \quad a \in W$

$y = b + l, \quad 0 < l < 1, \quad b \in W$ என்க.

$$x \times y = (a + k)(b + l)$$

$$= ab + kb + la + kl$$

$0 < kb + la + kl$ என்பதால்

$$[x \times y] = [ab + kb + la + kl]$$

$$> ab$$

$$> [x] \times [y].$$

பயிற்சி 4·4

I. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை மெய்யானவையா, மெய் யற்றவையா என்று கூறுக.

(1) $[4\cdot5 + 7\cdot8] = [4\cdot5] + [7\cdot8]$

(2) $[8\cdot9 + 5] = [8\cdot9] + [5]$

(3) $[\sqrt{3} + \sqrt{2}] > [\sqrt{3}] + [\sqrt{2}]$

(4) $[\pi + 4] = 7$

(5) $[2\cdot1 \times 3\cdot1] = 6$

(6) $[2\cdot8] \times [8\cdot2] = [2\cdot8 \times 8\cdot2]$

(7) $[2\cdot2] \times [2\cdot2] = 4$

(8) $[4\cdot4 \times 4\cdot4] = 16$.

II. கீழ்க் கண்ட அடைப்பு எண்ணுருக்களின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(1) $[8\cdot9 + 9\cdot8]$

(2) $[1\cdot1010010001 \ldots] + [2\cdot121416 \ldots]$

(3) $[\sqrt{48} \times \sqrt{27}]$

(4) $[\sqrt{48}] \times [\sqrt{27}]$

(5) $[\pi] \times [3\cdot78]$

§ 9. மெய்யெண் கோடு 'R'

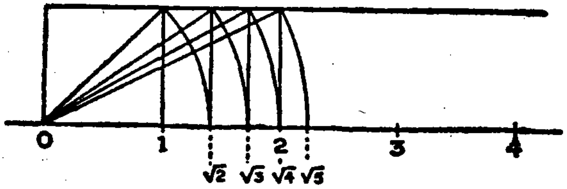
இப்பொழுது எண் கோட்டை எடுத்துக் கொண்டால், முன்பு, விகிதமுறு எண்களால், நிரப்பப்படாத சில புள்ளிகள் விட்டுப் போயிருந்தன வென்று பார்த்தோம். [எடுத்துக்காட்டாக $(\sqrt{2})$ என்ற புள்ளி, எண் கோட்டிலிருந்தும் கூட இது, விகிதமுறு எண்ணால் குறிக்கப்படாமையால், இப் புள்ளி முன்பு விட்டுப் போயிருந்த ஒன்றாகும்.] இது போல் $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... என்ற பல புள்ளிகள், விகிதமுறு எண்ணால் குறிக்கப்படவில்லை

இப்பொழுது எண் கோட்டில், எல்லா விகிதமுறு எண் களையும் செய்முறை வடிவ கணிதத்தின் மூலம் (கவையையும், அளவுகோலையும் மாத்திரமே கொண்டு) குறிக்க முடியும்.

இதே போல சில விகிதமுறு எண்களும் எண் கோட்டில் எங்கு அமைந்துள்ளன என்று கண்டுபிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

வர்க்க எண்களல்லாத எண்களின் வர்க்க மூலம், இதே போல் முழு எண்களின் 4 ஆவது மூலம், 8 ஆவது மூலம், பொதுவாக (2^n) ஆவது மூலம் — இவை எண் கோட்டில் அமைந்துள்ள இடத்தைக் கவை, அளவுகோல் இவற்றை மாத்திரம் கொண்டு, கண்டுபிடிக்கலாம். $\sqrt{2}$ அமைந்துள்ள இடத்தைக் கண்டு பிடிக்கும் முறையை முன்பே பார்த்தோம். இதேபோல் $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ ... என்னும் எண்களைக் கீழே காட்டி



படம் 4·2.

யுள்ளபடி கண்டுபிடிக்கலாம். ஆனால், π, 16-ன் கன மூலம் இவை போன்ற எண்கள் அமைந்திருக்கும் இடத்தை கவை, அளவுகோல் மூலம் எண் கோட்டில் காண இயலாது.

§ . 10 (i) மெய்யெண்களையும், எண் கோட்டையும் எடுத்துக் கொண்டால், மெய்யெண் கணத்தின் ஒவ்வோர் எண்ணிற்கும் ஒத்த ஒரு புள்ளி எண் கோட்டிலும், எண் கோட்டில் அமையும் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒத்த ஒரு மெய்யெண்ணும் உள்ளது. அதாவது எண் கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளின் கணமும், மெய் யெண்களின் கணமும் சமானமாகும்.

(ii) எண் கோட்டில் உள்ள A, B என்னும் புள்ளிகளின் பிம்பங்கள் a, b என்னும் மெய்யெண்கள் என்றால், A, B என்னும் புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள தூரம் $|a-b|$ ஆகும்.

இவ்விரு உண்மைகளையும் சேர்த்து, மெய்க்கோட்டு அடிகோள் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

எண் கோட்டின் A, B என்ற இரு புள்ளிகளுக்கு முறையே $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{4}$ என்னும் மெய்யெண்கள் பிம்பமானுல், A, B என்னும் புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள தூரம் $\left|3\frac{1}{2} - 4\frac{1}{4}\right|$ அதாவது $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$ அலகுகளாகும். இதே போல் A-ன் பிம்பம் $\sqrt{3}$ என்றும், B-ன் பிம்பம் $\sqrt{5}$ என்றும் கொண்டால் A, B-களுக்கிடையிலுள்ள தூரம் $\left|\sqrt{3} - \sqrt{5}\right|$ அலகுகள் அல்லது $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ அலகுகள் ஆகும்.

பயிற்சி 4·5

(1) எண் கோட்டிலுள்ள, A, B புள்ளிகளின் பிம்பம் 4, $7\frac{1}{2}$ என்ற மெய்யெண்களானுல், A, B-களுக்கிடையிலுள்ள தூரம் என்ன ?

(2) A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் பிம்பங்கள் முறையே 4·5478, 8·999, 9·72 என்னும் மெய்யெண்களானுல் A, B; B, C; A, C இவற்றுக்கிடையிலுள்ள தூரத்தைத் கணக்கிடு.

(3) A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் பிம்பம் $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ என்ருல், (i) A, B-களுக்கிடையிலுள்ள தூரம், (ii) B, C-களுக்கிடையிலுள்ள தூரம், (iii) A, C-களுக்கிடையிலுள்ள தூரம் இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(4) $\sqrt{8}$ ஐ எண்கோட்டில் கவை, அளவுகோல் இவற்றைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு கண்டு பிடிப்பாய் என்று விளக்கு.

§ **11.** விகிதமுறு எண்கள், விகிதமுரு எண்கள் இவற்றின் சேர்ப்புக் கணமே, மெய்யெண்களின் கணம் என்று முன்பே பார்த்தோம். ஆகவே விகிதமுறு எண்களின் கணம், மெய்யெண்களின் கணத்தின் உட்கணமாகும் (Sub set). இப்பொழுது விகிதமுறு எண்கள் எந்தெந்தப் பண்புகளைப் பெற்றுள்ளனவோ, அவை அனைத்தும், மெய்யெண்களுக்கும் பொருந்தும் என்பதைப் பார்ப்போம்.

கூட்டல் :

(1) அடைவுப் பண்பு :

இரு மெய்யெண்களின் கூடுதல் ஒரு மெய்யெண்ணுகவே இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

1·414411444111 ... ஒரு மெய்யெண். 0·5000 ... ஒரு மெய்யெண். இவற்றின் கூடுதலான 1·914411444111 ... ஒரு மெய்யெண்.

(2) மாற்றுப் பண்பு :

a, b இரு மெய்யெண்களானால்

$a + b = b + a$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$-0·41$ ஒரு மெய்யெண், 0·414414441 ... மற்றொரு மெய்யெண்

$- 0·41 + 0·414414441 ...$

$= 0·004414441 ...$

இதேபோல் $0·414414441 ... + (- 0·41)$

$= 0·004414441 ...$

(3) தொடர்புப் பண்பு (Associative Law) :

a, b, c என்பவை, மெய்யெண்களென்றால்,

$(a + b) + c = a + (b + c)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$(0·45 + 0·\dot{3}) + 8·101100111000 ...$

$= 0·78\dot{3} + 8·101100111000 ...$

$= 8·884433444333 ...$

இதேபோல்,

$0·45 + (0·\dot{3} + 8·101100111000 ...)$

$= 0·45 + 8·434433444333 ...$

$= 8·884433444333 ...$

(4) கூட்டல் சமனி :

'0' என்பது கூட்டல் சமனி ஆகும். அதாவது, a ஒரு மெய்யெண் எனில், $a + 0 = 0 + a = a$.

(5) ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணிற்கும் ஒரே ஒரு கூட்டல் தலைகீழி (Additive Inverse) உண்டு. சிறப்பாக, a-ன் கூட்டல் தலைகீழி $-a$ ஆகும்.

$a + (-a) = (-a) + a = 0$ என்பதைக் காண்க.

பெருக்கல் :

a, b, c என்பன மெய்யெண்கள் எனில்,

(1) அடைவுப் பண்பு :

$a \times b$-யும் ஒரு மெய்யெண்ணாகும்.

(2) மாற்றுப் பண்பு :

$a \times b = b \times a$

(3) தொடர்புப் பண்பு :

$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(4) பெருக்கல் சமனி :

1 என்ற மெய்யெண், $a \times 1 = 1 \times a = a$ என்றவாறு அமைகிறது.

(5) $a \neq 0$ எனில்; a-க்குப் பெருக்கல் தலைகீழி உண்டு; இதுவே, $\frac{1}{a}$ ஆகும்.

$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$ என்பதைக் கவனிக்க.

(6) a, b, c மெய்யெண்கள் என்றால், பின்வரும் பங்கீட்டுப் பண்புகள் மெய்யானவை.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

எடுத்துக்காட்டு :

$$\sqrt{3}\,(4 + \sqrt{5}) = 4\sqrt{3} + \sqrt{15}$$
$$(4 + \sqrt{5})(\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} + \sqrt{15}$$

வரிசை :

(7) a, b என்ற ஏதேனுமிரு மெய்யெண்கள் தரப்பட்டால்,

(i) $a = b$ ஆக இருக்கலாம்;

அல்லது,

(ii) $a > b$ ஆக இருக்கலாம்;

அல்லது,

(iii) $a < b$ ஆக இருக்கலாம்.

(8) விகிதமுறு எண்களின் கணத்திலுள்ளது போலவே இங்கும் பின்வரும் பண்புகள் மெய்யானவை :

a, b, c என்பன மூன்று மெய்யெண்கள் எனில்,

(i) $a > b, \ b > c$ எனில், $a > c$

(ii) $a > b$ எனில், $a + c > b + c$.

(iii) $a > b, \ c > 0$ எனில், $ac > bc$;

$a > b, \ c < 0$ எனில், $ac < bc$

(iv) a, b, c, d என்பன நான்கு மெய்யெண்கள்,

$a > b, \ c > d$ எனில், $a + c > b + d$

12. இயற் கணிதத்தில் நாம் அடிக்கடி பயன்படுத்தும் சில உண்மைகள் அடியில் தொகுத்துத் தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றை நன்கு மனத்தில் பதிய வைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

(1) $-(-a) = a$

எடுத்துக்காட்டு :

(i) $-(-3) = 3$

(ii) $-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)} = a$ (இங்கு $a \neq 0$)

எடுத்துக்காட்டு :

(i) $\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{3}\right)} = -3$

(ii) $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{2}$

(3) $a + b = a$

$$\Longrightarrow b = 0$$

நிரூபணம் :

$$a + b = a$$

$$\Longrightarrow a + b = a + 0$$

$$\Longrightarrow \quad b = 0 \quad \text{(நீக்கல் விதி)}$$

(4) $a.b = a, \quad a \neq 0$

$$\Longrightarrow b = 1$$

நிரூபணம் :

$$a.b = a$$

$$\Longrightarrow a.b = a.1, \text{ மேலும் } a \neq 0$$

$$\therefore \quad b = 1 \quad \text{(நீக்கல் விதி)}$$

(5) $-(a + b) = (-a) + (-b)$

எடுத்துக்காட்டு :

(i) $-(-\sqrt{3} + 4) = -(-\sqrt{3}) + (-4) = \sqrt{3} - 4$

(ii) $-\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

(6) $\frac{1}{(ab)} = \left(\frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$

எடுத்துக்காட்டு :

(i) $\frac{1}{\sqrt{3} \times 4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{4 \times \sqrt{3}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 5}} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{5}}$

(7) $a \cdot 0 = 0$

எடுத்துக்காட்டு :

(i) $\sqrt{3} \times 0 = 0$; (ii) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times 0 = 0$

(iii) $\pi \times 0 = 0$; (iv) $0 \times 0 = 0$

(8) a யோ அல்லது b யோ, 0 என்றால், $a \cdot b = 0$ மறுதலையாக, $ab = 0$ எனில், $a = 0$ அல்லது $b = 0$.

(9) $a^2 + b^2 = 0$ என்றால் $a = 0$, மேலும் $b = 0$.

இதேபோல் மறுதலையாக $a = 0$, $b = 0$ என்றால் $a^2 + b^2 = 0$.

(10) $-a \cdot b = a \cdot -b = -(a \cdot b)$

(11) $(-a)(-b) = ab$.

(12) கூட்டலின் போது நீக்கல் விதி :

(a) a, b, c என்பது மெய்யெண்களானால் $a + c = b + c$ என்றால்,

$$(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$$
$$= a + (c + (-c)) = b + (c + (-c))$$
$$a + 0 = b + 0$$
$$a = b.$$

எனவே, $a + c = b + c \implies a = b$.

பெருக்கலின் நீக்கல் விதி :

(b) இதேபோல் $a \cdot c = b.c$; $c \neq 0$ என்றால்

$$(a \cdot c) \times \frac{1}{c} = (b \cdot c) \cdot \frac{1}{c}$$
$$a \cdot \left(c \cdot \frac{1}{c}\right) = b \cdot \left(c \cdot \frac{1}{c}\right)$$
$$a \cdot 1 = b \cdot 1$$
$$a = b.$$

எனவே, $a \cdot c = b \cdot c$, $c \neq 0 \implies a = b$.

பயிற்சி 4·6

(1) பின்வரும் மும்மடி நியாயங்கள் சரியானவையா என்று கூறுக :

x, y என்பன மெய்யெண்கள்.

(i) $4x = 2$ என்பதால் $x = \frac{2}{4}$

(ii) $x + 4 = \sqrt{3}$ என்பதால் $x = \sqrt{3} \quad 4$

(iii) $4x = 0$ என்பதால் $x = 0$

(iv) $x^2 + y^2 = 0$ என்பதால் $x = y$

(v) $x + 5 = 5$ என்பதால் $x = 0$

(vi) $6x = 6$ என்பதால் $x = 1$

(vii) $x + \sqrt{3} = y + \sqrt{3}$ என்பதால் $x = y$

(viii) $xy = 0$ என்பதால் $x = 0$ அல்லது $y = 0$.

(2) a, b, c என்பன மெய்யெண்கள் என்க.

(i) $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ எனில், a, b, c-ன் மதிப்புகள் யாவை ?

(ii) $abc = 0$ எனில் நீ என்ன அறிகிறாய் ?

(3) $ax = a$ எனில், என்ன முடிவுகள் சாத்தியமானவை ?

§ 18. மெய்யெண்களின் அடர்த்திப் பண்பு

ஏதேனும் இரு மெய்யெண்களுக்கிடையில், (அவற்றின் வித்தியாசம், எவ்வளவு குறைந்த அளவில் இருப்பினும்) மற்றொரு மெய்யெண் உண்டு. இதனின்று, இரு மெய்யெண்களுக்கிடையில் பல மெய்யெண்கள் உண்டு என்பது விளங்கும்.

பயிற்சி 4·7

(1) கீழ்வரும் மெய்யெண்களை இறங்கு வரிசையில் எழுது.

(a) $\frac{1}{3}$, ·33, ·333033300333000 ...

(b) π, $\sqrt{10}$, 3·14

(c) $-\frac{4}{5}$, $-\sqrt{65}$, $-$·801.

(2) பின்வருவன மெய்யானவையா, மெய்யற்றவையா என்று கூறுக. இங்கு a, b, c என்பன மெய்யெண்கள்.

(i) $a > b$ எனில் $a - c > b - c$

(ii) $a > b$, $c \neq 0$ எனில், $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

(iii) $a > b$ எனில், $a^2 > b^2$

(iv) $a^2 > b^2$ எனில், $a > b$

(v) $a > b$ எனில், $-a < -b$

(vi) $a > b,\ b > c$ எனில், $2b > a + c$

(vii) $ac > bc,\ c \neq 0$ எனில், $a > b$

(viii) $a + c > b + c$ எனில் $a > b$

(ix) $a = b + c$ எனில் $a > b$

(x) $a = b - c$ எனில் $a < b$.

14. a, என்பது ஒரு பூச்சியமல்லாத விகிதமுறு எண், $m, n \in Z$ எனில்,

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{(a^m)}{a^n} = a^{m-n}$ (iv) $a^0 = 1$

a, b என்பன பூச்சியமல்லாத விகிதமுறு எண் எனில்,

(v) $(ab)^m = a^m b^m$ (vi) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

என்ற அடுக்குக் குறி விதிகளை நீங்கள் அறிவீர்கள்.

a, b என்பன விகிதமுரு எண்களாயினும் இவ் விதிகள் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு :

(1) $(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^{5+2} = (\sqrt{3})^7$

(2) $\frac{(\sqrt{2})^5}{(\sqrt{2})^3} = (\sqrt{2})^{5-3} = (\sqrt{2})^2$

(3) $((\sqrt{3})^2)^5 = (\sqrt{3})^{10}$

(4) $(\sqrt{5})^0 = 1$

(5) $(\pi\sqrt{3})^3 = \pi^3 (\sqrt{3})^3$

(6) $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^4 = \frac{(\sqrt{3})^4}{(\sqrt{7})^4}$

§ 15. இப்பொழுது $a^r \pm a^s$-ன் மதிப்பு என்னவென்று பார்ப்போம்.

$r > s$ என்றால், $r = s + k$

$$a^r \pm a^s = a^{(s+k)} \pm a^s$$

$$= a^s \cdot a^k \pm a^s$$

$$= a^s (a^k \pm 1).$$

இதே போல் $s > r$ என்றால் $s = r + k$

$$a^r \pm a^s = a^r \pm a^{r+k}$$
$$= a^r \pm a^r \cdot a^k$$
$$= a^r (1 \pm a^k)$$

பயிற்சி 4·8

இங்கு a, b, c, x, y, z என்பன பூச்சியமல்லாத மெய்யெண்கள்.

I. *பின் வருவனவற்றை முடிந்த வரை சுருக்கி எழுது.*

(1) $a^{10}.a^{15}$ (2) $\frac{a^{15}}{a^{10}}$ (3) $\frac{a^{10}}{a^{15}}$

(4) $a^{10}.a^{-5}$ (5) $a^{-10}.a^{-5}$ (6) $(a^5)^{-8}$

(7) $(a^{-8})^6$ (8) $(a^{-3})^{-6}$ (9) $a^{-15}.b^{-10}$

(10) $a^{-8}.b^{-6}$ (11) $\frac{a^8}{b^8}$ (12) $\frac{a^{-7}}{b^{-7}}$

(13) $a^8 + a^{15}$ (14) $a^8 + a^{-5}$ (15) $a^{-8} - a^{-5}$

(16) $a^{-8} + a^5$ (17) $a^{+8} - a^{-5}$ (18) $a^5 - a^8$

(19) $a^{-5} - a^8$ (20) $a^{-5} - a^{-8}$.

II. (a) $\sqrt{3}^x \times \sqrt{3}^8 = \sqrt{3}^{15}$ என்றால் x-ன் மதிப்பென்ன ?

(b) $15^x \times 8^{10} = (30)^{30}$ என்றால் x-ன் மதிப்பென்ன ?

(c) $\frac{4^x}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$ என்றால் x-ன் மதிப்பென்ன ?

III. $P = x^3 y^8 z^6$. $Q = x^3 y^2 z^4$. $R = x^2 y^2 z$ என்றால்,

(a) $P \times Q \times R$ (b) $P^3 \cdot Q^2 \cdot R$ (c)

இவற்றின் மதிப்புகளை x, y, z மூலம் கண்டுபிடி.

IV. $a > 1$, மேலும் $a^x = a^y$ எனில், xக்கும் yக்கும் என்ன சம்பந்தம் ?

V. சுருக்குக.

(a) $(\sqrt{3})^8 (\sqrt{3})^4$ (b) $\frac{(\sqrt{2})^{10}}{(\sqrt{2})^8}$

(c) $\frac{(\sqrt{3})^4 (\sqrt{5})^4}{(\sqrt{15})^6}$ (d) $\frac{(\sqrt{6})^8}{(\sqrt{2})^6}$

(e) $\frac{4\pi^5}{\sqrt{8}\,\pi^3}$ (f) $\frac{(8\pi)^7}{(16\pi)^4}$

VI. பின்வருவன மெய்யானவையா என்று கூறுக.

(1) $a^x \times b^y = (ab)^{x+y}$ (2) $a^x + b^y = (a+b)^{x+y}$

(3) $a^x \times b^y = a^x b^y$ (4) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

(5) $a^x \times b^x = (ab)^x$ (6) $a^x - b^x = (a-b)^x$

(7) $a^3 + b^3 = (a+b)^3$.

சோதனைத்தாள்

பகுதி—I

I. கீழே கொடுத்துள்ளவைகள் மெய்யானவையா எனக் கூறுக.

(1) $\sqrt{3}$ ஒரு சுழல் தசம பின்னம்.

(2) A, B என்பவை, எண் கோட்டின் இரு புள்ளிகளானால், இவற்றின் மெய்யெண் பிம்பங்கள் a, b ஆனால், A, B எனும் புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள தூரம் $|a - b|$ ஆகும்.

(3) $\sqrt{400 + 64} = 28$

(4) $[X \cdot Y] < [X] \cdot [Y]$

(5) $|-7 \cdot 2| \times |2 \cdot 7| = 7 \cdot 2 \times 2 \cdot 7$

II. காலி இடங்களை நிரப்பு.

(a) சுழல் தன்மையற்ற முடிவுறு தசம பின்னங்கள் ... ... எனப்படும்.

(b) எண் கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையும், மெய்யெண்களின் எண்ணிக்கையும் ஒன்றுக்கொன்று—

(c) π என்பது ஒரு ... ... எண்.

(d) $[x + y] \geqslant$ ... .

(e) $\sqrt{48} = 4 \times$ ... ...

III. பொருத்தி அமை :

(1) $(a^r \cdot a^s) \div a^t$	$(-a) + (-b)$
(2) $\sqrt{400} \div \sqrt{100}$	ab-ன் கூட்டல் தலை கீழி
3) $-(a+b)$	$\frac{(\sqrt{2}+1)}{8}$
(4) $\frac{1}{4}$-க்கும் $\frac{\sqrt{2}}{4}$-க்கும் இடையிலுள்ள ஓர் எண்	2
(5) $-ab$	a^{r+s-t}

சோதனைத்தாள்

பகுதி—II

I. மெய்யெண்களுக்கும், முழுக்களுக்கும் பொதுவாக உள்ள பண்புகளை, எடுத்துக்காட்டுடன் கூறு. முழுக்களுக்கில்லாத, ஆனால் மெய்யெண்களுக்குள்ள ஏதேனும் ஒரு பண்பைக் கூறு.

II. கீழே கொடுத்துள்ளவற்றின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(1) $[15\cdot987 + 14\cdot872]$ (2) $[7\cdot23] \times [14\cdot23]$

(3) $[8\cdot4 \times 4\cdot8]$ (4) $\sqrt{53^2 - 45^2}$ (5) $\sqrt{3675}$

5. கணக்கீடு

§ 1. வர்க்க மூலம்

வர்க்க மூலம் என்றால் என்ன என்றும், ஒரு முழு எண்ணின் வர்க்க மூலத்தை, 'காரணிப்படுத்தல் முறையில்' எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது என்றும் முன் வகுப்புகளில் கற்றறிந்தவற்றை மீண்டும் நினைவுபடுத்திக் கொள்க. ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் மிகை வர்க்க மூலத்தைக் கணக்கிடுதல் எவ்வாறு என இங்குப் பார்ப்போம்.

காரணிப் படுத்தல் முறை :

கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்க்கவும் :

எடுத்துக்காட்டு 1 :

441-ன் வர்க்க மூலத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

$$441 = 3 \times 3 \times 7 \times 7$$

$$441 = 3^2 \times 7^2$$

$$\therefore \sqrt{441} = \sqrt{3^2 \times 7^2} = (3^2 \times 7^2)^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} \times (7^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3 \times 7 = 21$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$1\frac{9}{16}$-ன் வர்க்க மூலத்தை கண்டுபிடி.

தீர்வு :

$$1\frac{9}{16} = \frac{25}{16} = \frac{5^2}{4^2}$$

$$\therefore \sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{5^2}{4^2}} = \left(\frac{5^2}{4^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(5^2)^{\frac{1}{2}}}{(4^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$\cdot 25$-ன் வர்க்க மூலத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

$$\cdot 25 = \cdot 5 \times \cdot 5 = (\cdot 5)^2$$

$$\sqrt{\cdot 25} = \sqrt{(\cdot 5)^2} = [(\cdot 5)^2]^{\frac{1}{2}} = \cdot 5$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$7\cdot 29$-ன் வர்க்க மூலத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

$$7\cdot 29 = \frac{729}{100} = \frac{27 \times 27}{10 \times 10} = \frac{27^2}{10^2}$$

$$\therefore \sqrt{7\cdot 29} = \left(\frac{27^2}{10^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{27}{10} = 2\cdot 7$$

பயிற்சி 5·1

கீழே கொடுத்துள்ள விகிதமுறு எண்களின் வர்க்க மூலங்களைக் கண்டுபிடி.

(1) (i) 576 (ii) 1225 (iii) 2304 (iv) 640000

(2) (i) $5\frac{19}{25}$ (ii) $12\frac{37}{49}$ (iii) $56\frac{1}{4}$ (iv) $113\frac{7}{9}$

(3) (i) $\cdot 36$ (ii) $\cdot 0225$ (iii) $20\cdot 25$ (iv) $17\cdot 64$

(4) (i) $15^2 \times 11^2$ (ii) $7^2 \times a^2$ (iii) $9^4 \times 5^6$

(iv) 16^{10} (v) $49x^4y^2$ (vi) a^4b^{-6}

(5) (i) $15 \times 35 \times 21$ (ii) $ab \times bc \times ca$

(iii) $a^4 b^8 c^2 \times a^2 b c^4$ (iv) $(a + b)^2$

(v) $(c - d)^2$

(6) $a^2 + b^2 = c^2$ என்பதில் $a = 18$, $b=24$ என்றால், c-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(7) ஒரு சதுர வயலின் பரப்பளவு 2·25 ஏர் என்றால், அதன் சுற்றளவு என்ன ?

(8) ஒரு செவ்வக நிலத்தின் நீளம் 6·76 ஹெக்டா மீட்டர், அகலம் 4·41 ஹெக்டா மீட்டர். இந் நிலத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமமான பரப்பளவுள்ள ஒரு சதுர நிலத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் என்ன ?

வகுத்தல் முறை :

1849-ன் வர்க்க மூலத்தைக் கண்டுபிடி.

$$40^2 = 1600 ; \quad 50^2 = 2500.$$

கொடுத்துள்ள எண் 1600ஐக் காட்டிலும் அதிகமாகவும் 2500ஐக் காட்டிலும் குறைவாகவும் இருப்பதால், அதன் வர்க்க மூலம் 40ஐ விட அதிகமாகவும் 50ஐ விட குறைவாகவும் இருக்க வேண்டுமல்லவா ?

1849-ன் வர்க்க மூலத்தை $(40 + x)$ என எடுத்துக் கொள்வோம். அப்பொழுது $(40 + x)^2 = 1849$.

$$1600 + (2 \times 40 \times x) + x^2 = 1849$$
$$80x + x^2 = 1849 - 1600 = 249$$

80ஐ சோதனை வகு எண்ணாகக் கொண்டு 249ஐ வகுக்கத் தோராயமாக 3 கிடைக்கிறது. x-க்குப் பதில் 3 என மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுப் பார்க்க. இம் மதிப்பு சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்துகிறது.

எனவே, 1849-ன் வர்க்க மூலம் 43 ஆகும்.

மேலுள்ளவற்றையே சுருக்கமாகப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

	$40 + \underline{3}$
40	$\overline{1849}$
	1600
$(2 \times 40) + \underline{3}$	249
	$240 + 9$
	0

	$a + \underline{b}$
a	$a^2 + 2ab + b^2$
	a^2
$2a + \underline{b}$	$2ab + b^2$
	$2ab + b^2$

இதனையே இன்னும் சுருக்கமாகக் கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

குறிப்பு :

	$4\underline{3}$
4	$\overline{1849}$
	16
$8\underline{3}$	249
	249

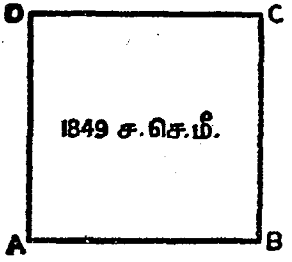
(1) வலப் பக்கத்திலிருந்து இரண்டிரண்டு இலக்கங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

(2) 18ஐ விட சிறிய மிகப் பெரிய முழு வர்க்கம் 16. எனவே வர்க்க மூலத்தில் முதல் இலக்கம் 4.

(3) முதல் கழித்தலிற்குப் பிறகு இரண்டு இலக்கங்கள் எடுத்தெழுதப்பட்டுள்ளன.

$(1849)^{\frac{1}{2}} = 43$

(4) வர்க்க மூலத்தில் முதல் இலக்கமான 4ஐ 2 ஆல் பெருக்கி எழுதப்பட்டுள்ளது.

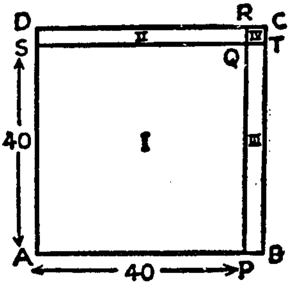


படம் 5-1.

மேலுள்ள 'வகுத்தல் முறை'க்கு ஜியோமிதி விளக்கம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

A, B, C, D என்ற சதுரத்தின் பரப்பு 1849 ச.செ.மீ. என்க. அப்பொழுது இச் சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 1849-ன் வர்க்க மூலமாக இருக்க வேண்டுமல்லவா?

முதல் தோராய மதிப்பு 40 ($\because 40^2 = 1600$). I என்ற சதுரத்தின் பரப்பு 1600. எனவே, II, III என்ற இரு செவ்வகங்களின் பரப்பளவும் IV என்ற சிறிய சதுரத்தின் பரப்பளவும் சேர்ந்து 249 ச.செ.மீ. ஆகும். II, III என்ற இரு செவ்வகங்களிற்கும் நீளம் 40 செ.மீ. எனவே, தோராயமாக அவற்றின் அகலத்தைக் கணக்கிட (249ஐ 80ஆல் வகுக்க) 3 என வருகிறது. அகலம் 3 என்றால் மூலைச் சதுரத்தின் பரப்பளவு 9.



படம் 5·2.

$$1849 = 1600 + 2 \times 40 \times 3 + (3 \times 3)$$
$$= 40^2 + 2 \times 40 \times 3 + 3^2$$
$$= (40 + 3)^2 = 43^2$$

$$\therefore \sqrt{1849} = 43.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

28224 வர்க்க மூலத்தைக் கண்டுபிடி.

		168
படி ... 1	1	$\overline{2}\,\overline{82}\,\overline{24}$
		1
படி ... 2	26	182
		156
படி ... 3	328	2624
		2624

இரண்டைவிட சிறிய வர்க்கம் 1. எனவே படி 1-ல் $\sqrt{1}$ (= 1) போடப்பட்டுள்ளது. வர்க்க மூலத்தில் முதல் இலக்கம் 1 ஐ இரண்டால் பெருக்கி, 2 ஆம் படியில் போடப்பட்டுள்ளதையும், வர்க்க மூலத்தில் முதலிரு இலக்கங்களான '16'ஐ இரண்டால் பெருக்கி 32 என படி 3-ல் போடப்பட்டுள்ளதையும் கவனிக்க.

$$(28224)^{\frac{1}{2}} = 168$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

547·56-ன் வர்க்க மூலத்தைக் கண்டுபிடி.

	23·4
2	$\overline{5}\,\overline{47}\cdot\overline{56}$
	4
43	147
	129
464	1856
	1856

$\therefore \quad (547\cdot56)^{\frac{1}{2}} = 23\cdot4.$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

5-ன் வர்க்க மூலத்தை 3 தசமத்தானத் திருத்தமாகக் கண்டுபிடி.

	2·2360
2	5·00000000
	4
42	100
	84
443	1600
	1329
4466	27100
	26796
44720	30400
	0
	30400

$\sqrt{5} = 2\cdot236$ (3 த. தி.)

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$\frac{4}{7}$-ன் வர்க்க மூலத்தை இரண்டு தசமத்தானத் திருத்தமாகக் கண்டுபிடி.

$$\frac{4}{7} = \cdot\dot{5}7142\dot{8}$$

	·755
7	$\cdot\overline{57}\,\overline{14}\,\overline{28}\,\overline{5}$
	49
145	814
	725
1505	8928
	7525
	1403

$$\therefore \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \cdot 755$$

$$\simeq \cdot 76 \text{ (2 த. தி.)}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$\sqrt{2} \simeq 1\cdot414$ எனக் கொண்டு பின் வருவனவற்றின் வர்க்க மூலங்களை இரண்டு தசமத்தானத் திருத்தமாகக் கண்டுபிடி.

(i) 32 (ii) 98

தீர்வு :

(i) $\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 16} = \sqrt{2} \times \sqrt{16} \simeq 1\cdot414 \times 4 \simeq 5\cdot656$

$\simeq 5\cdot66$

(ii) $\sqrt{98} = \sqrt{2 \times 49} = \sqrt{2} \times \sqrt{49} \simeq 1.414 \times 7 \simeq 9\cdot898$

$\simeq 9.90$

பயிற்சி 5·2

(1) 10-ன் தகுந்த மடங்கை முதல் தோராய வர்க்க மூலமாகக் கொண்டு, $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ என்னும் சர்வ சமத்தைப் பயன்படுத்திப் பின் வருவனவற்றின் வர்க்க மூலங்களைக் கண்டுபிடி.

(i)	1156	(ii)	1681	(iii)	3969	(iv)	2704
(v)	9216	(vi)	5929	(vii)	7225	(viii)	1369

(2) கீழ் வருவனவற்றின் வர்க்க மூலங்களைக் கண்டுபிடி.

(i)	361	(ii)	529	(iii)	961
(iv)	841	(v)	2209	(vi)	3721
(vii)	5329	(viii)	6889	(ix)	15129
(x)	54756	(xi)	97344	(xii)	43681
(xiii)	103041	(xiv)	207936	(xv)	308025
(xvi)	502681	(xvii)	1522756	(xviii)	4888521
(xix)	5438224	(xx)	9622404	(xxi)	11594025
(xxii)	19749136	(xxiii)	25030009	(xxiv)	42667024

(3) பின்வரும் சுத்த தசம பின்னங்களின் வர்க்க மூலங்களைக் கண்டுபிடி.

(i)	0·2025	(ii)	0·6241	(iii)	0·1296
(iv)	0·6724	(v)	0·0625	(vi)	0·0729
(vii)	0·0784	(viii)	0·0289	(ix)	0·165424
(x)	0·271441	(xi)	0·368449	(xii)	0·964324

(xiii)	·099225	(xiv)	·071289
(xv)	·092416	(xvi)	·009801
(xvii)	0.000144	(xviii)	0·00054756
(xix)	0·04020025	(xx)	0·00097969

(4) கீழ் வருவனவற்றின் வர்க்க மூலங்களைக் கண்டுபிடி.

(i)	4·7089	(ii)	9·5481	(iii)	42·3801
(iv)	954·81	(v)	2567·44	(vi)	7099·64

(5) 9506·25-ன் வர்க்கமூலம் 97·5 என்றால் பின் வருவனவற்றின் வர்க்க மூலங்களைக் கூறுக.

(i) 950625 (ii) 95·0625 (iii) ·00950625

(6) மூன்று தசமத்தானங்களுக்குத் திருத்தமாகப் பின் வருவனவற்றின் வர்க்க மூலங்களைக் கண்டுபிடி.

(i) 2 (ii) 3 (iii) 7 (iv) 13
(v) 17 (vi) ·4 (vii) ·9 (viii) 1·6
(ix) 6·4

(7) கீழுவருவனவற்றின் வர்க்க மூலங்களை 3 தசமத்தானத் திருத்தமாகக் கண்டுபிடி.

(i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{3}{7}$ (iv) $\frac{4}{9}$

(8) $\sqrt{2} \simeq 1{\cdot}414$, $\sqrt{3} \simeq 1{\cdot}732$, $\sqrt{5} \simeq 2{\cdot}236$ எனக் கொண்டு பின் வருவனவற்றின் வர்க்க மூலங்களை 3 தசமத்தானத் திருத்தமாகக் கண்டுபிடி.

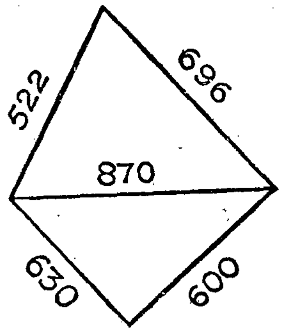
(i) 50 (ii) 48 (iii) 75 (iv) 45
(v) 80 (vi) 72 (vii) 20 (viii) 18

(9) ஒரு முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகள் a, b, c எனில், அதன் பரப்பளவு $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ என்பது ஒரு சூத்திரம். இங்கு $2s = a + b + c$.

(i) $a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5$

(ii) $a = 17, \quad b = 15, \quad c = 8$

எனில், இம் முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளைக் காண்க.



படம் 5-3.

(10) மேலே படத்தில் காட்டியுள்ள நாற்கரத்தின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்க.

§2. நுட்பமும் நுணுக்கமும் (Precision and Accuracy)

கருவிகளின் உதவி கொண்டு, அளந்து கண்டுபிடிக்கக் கூடிய அளவுகள் யாவும் தோராயமான அளவுகளே என முன் வகுப்பில் படித்திருக்கிறீர்கள். தோராயமான அளவு கொடுக்கப் பட்டால் உண்மை அளவின் (இருக்கக்கூடிய) மேல் எல்லையையும் கீழ் எல்லையையும், எவ்வாறு கணக்கிடுவது என்றும் கூட முன் வகுப்பிலேயே கற்றிருக்கிறீர்கள்.

நுட்பம் (Precision)

தோராயமான அளவில், அளக்க உபயோகப்படுத்தப்பட்ட மிகச் சிறிய அலகை (smallest unit) அளவின் நுட்பம் என்கிறோம்.

கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளை நன்கு கவனிக்கவும்..

	தோராயமான அளவு	நுட்பம்	ஏற்படக் கூடிய அதிகபட்ச பிழை
(i)	15·4 செ.மீ.	·1 செ.மீ.	·05 செ.மீ.
(ii)	15·43 செ·மீ.	·01 செ.மீ.	·005 செ.மீ.
(iii)	23 கிராம்	1 கிராம்	·5 கிராம்.

(i) ஆம் அளவில், மிகக் குறைந்த அலகான ·1 செ.மீ. ஐப் போல் 154 மடங்குகள் உள்ளன; ஆனால் (ii) ஆம் அளவில் மிகக் குறைந்த அலகான ·01 ஐப் போல் 1543 மடங்குகள் உள்ளன. எனவே, முதல் அளவைக் காட்டிலும் இரண்டாம் அளவு அதிக நுட்பமானது (more precise).

(i) ஆம் அளவில் ஏற்படக் கூடிய அதிகபட்ச தனிப் பிழையைக் காட்டிலும் (ii) ஆம் அளவில் ஏற்படக் கூடிய அதிகபட்ச தனிப்பிழை குறைவு. அதிகபட்ச தனிப்பிழை குறைவு என்றால், நுட்பம் அதிகம் என்றாகும்.

நுட்பத்தைக் குறிக்கும் அளவு சிறிது என்றால் நுட்பத் தன்மை அதிகம் என்பதை நன்கு கவனிக்கவும்.

ஒரு தோராயமான அளவில், ஏற்படக் கூடிய அதிகபட்ச தனிப்பிழை, அந்த அளவின் நுட்பத்தைத் தீர்மானிக்கிறது எனலாம்.

நுணுக்கம் (Accuracy)

ஒரு தோராயமான அளவில், ஏற்படக்கூடிய அதிகபட்ச தனிப்பிழைக்கும் அத் தோராய அளவிற்கும் உள்ள விகிதம் — அதாவது, (தோராய அளவைப் பொறுத்து) சார்புப் பிழை — நுணுக்கத்தைத் தீர்மானிக்கிறது.

தோராயமான அளவு	ஏற்படக்கூடிய அதிகபட்ச தனிப்பிழை	தோராய அளவைப் பொறுத்து, சார்புப் பிழை
(i) 10 செ.மீ.	·5 செ.மீ.	$\frac{\cdot 5}{10}$ (= 5%)
(ii) 10·0 கிராம்	·05 கிராம்	$\frac{\cdot 05}{10}$ (= ·5%)

(ii) ஆம் அளவின் சார்புப் பிழை, (i) ஆம் அளவின் சார்புப் பிழையை விடக் குறைவாதலால், (ii) ஆம் அளவின் நுணுக்கம் (i) ஆம் அளவின் நுணுக்கத்தைவிட அதிகம் என்கிறோம். அதாவது (ii) ஆம் அளவு, (i) ஆம் அளவைவிட நுணுக்கமானது (more accurate) என்கிறோம்.

அளக்கப் பயன்படும் அலகு சிறிதாக சிறிதாக அந்த அளவின் நுட்பம் அதிகரிக்கிறது; ஏற்படக்கூடிய அதிகபட்ச பிழைக்கும், தோராயமான அளவிற்கும் உள்ள சார்புப் பிழை குறையக் குறைய அளவின் நுணுக்கம் அதிகரிக்கிறது.

நுட்பம் என்பதும், நுணுக்கம் என்பதும் இரு முற்றிலும் வெவ்வேறான கருத்துகளாகும்.

இரு வெவ்வேறு வகை அலகுகளால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு வெவ்வேறு அளவுகளின் நுட்பங்களை ஒப்பிட முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக, கீழ் வரும் மூன்று அளவுகளைக் கவனிக்கவும்.

(i) 38·5°C ... நுட்பம் ·1°C

(ii) 38·5 செ.மீ. ... நுட்பம் ·1 செ.மீ.

(iii) 38·5 கிராம் ... நுட்பம் ·1 கிராம்

மேலுள்ள மூன்று அளவுகளின் நுட்பங்களை ஒப்பிட முயல்வது பொருளற்றதாகும்; ஏனெனில் வெப்பநிலை, நீளம், பொருள் திணிவு என்பவை வெவ்வேறு வகை அளவைகளாகும் (different kinds of magnitudes).

ஆனால் 38·5 கிராம் என்ற அளவு 38·5 கிலோ கிராம் என்ற அளவினை விட நுட்பமுடையதாகும். முதல் அளவில் ஏற்படக் கூடிய அதிகபட்ச பிழை ·05 கிராம்; இரண்டாம் அளவில் ஏற்படக் கூடிய அதிகபட்ச பிழை ·05 கிலோகிராம் அல்லது 50 கிராம் ஆகும்.

மாறாக, நுணுக்கத்தைத் தீர்மானிக்கும் சார்புப்பிழை ஒரு விகிதமாதலால் — எந்த அலகையும் சார்ந்திருப்பதில்லையாதலால் — இரு வெவ்வேறு வகை அளவுகளின் நுணுக்கங்களைக் கூட ஒப்பிட முடியும். எடுத்துக்காட்டாக, 12·5 செ.மீ. 12·5 C. 12·5 கிராம், 12·5 கிலோகிராம், 12·5 நொடி இவை யாவும் சம நுணுக்கமுடைய அளவுகளாகும். ஒவ்வோர் அளவிலும் சார்புப் பிழை ·004 ஆகும்.

இரண்டு அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டால், அவற்றில் அதிக நுட்பமுடைய அளவு மற்றதைக் காட்டிலும் அதிக நுணுக்கமுடையதாயிருக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை; அதிக நுணுக்கமுடையதாகவோ, அன்றி குறைந்த நுணுக்கமுடையதாகவோ இருக்கலாம்.

இதேபோல் இரண்டு அளவுகளுள் அதிக நுணுக்கமுடைய அளவு மற்றதைக் காட்டிலும் அதிக நுட்பமுடையதாக இருக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை.

பின்வரும் இரு எடுத்துக்காட்டுகள் இதனை நன்கு விளக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

1·25 கிராம், 12·5 கிராம் என்ற இரு அளவுகளின் (i) நுட்பம் (ii) நுணுக்கம் இவற்றை ஒப்பிடுக.

தீர்வு:

1·25 கிராம் என்ற அளவில் ஏற்படககூடிய அதிகபட்ச தனிப்பிழை ·005 கிராம்.

12·5 கிராம் என்ற அளவில் ஏற்படக்கூடிய அதிகபட்ச தனிப்பிழை ·05 கிராம்.

எனவே 1·25 கிராம் என்ற அளவு 12·5 கிராம் என்ற அளவினைவிட அதிக நுட்பமுடையது (more precise).

ஆனால், இரு அளவுகளும் சம நுணுக்கமுடையவை (equally accurate). ஏனெனில், முதல் அளவின் சார்புப் பிழை

$$= \frac{\cdot 005}{1 \cdot 25} = \frac{5}{1250} = \cdot 004 = \cdot 4\%$$

இரண்டாவது அளவில் ஏற்படும் சார்புப்பிழை

$$= \frac{\cdot 05}{12 \cdot 5} = \frac{5}{1250} = \cdot 4\%$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

4·9 செ.மீ., 49·5 செ.மீ. என்ற இரு அளவுகளின் (i) நுட்பம் (ii) நுணுக்கம் இவற்றை ஒப்பிடுக.

இரு அளவுகளும் சம நுட்பமுடையவை ; ஏனெனில், இரண்டிலும் ஏற்படக் கூடிய அதிகபட்ச தனிப்பிழை ·05 செ.மீ. ஆகும். ஆனால் 49·5 என்ற அளவின் நுணுக்கம், 4·9 செ.மீ. என்ற அளவின் நுணுக்கத்தைவிட அதிகம். ஏனெனில், முதல் அளவில் ஏற்படக் கூடிய சார்புப்பிழை

$$= \frac{\cdot 05}{49 \cdot 5} \doteq \cdot 001 = \cdot 1\% \text{ ஆகும்.}$$

ஆனால் இரண்டாம் அளவில் ஏற்படும் சார்புப் பிழை

$$= \frac{\cdot 05}{4 \cdot 9} \doteq \cdot 01 = 1\%.$$

பயிற்சி 5·3

(1) கீழே கொடுத்துள்ள கணங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள அளவுகளை நுட்ப நிலை கருதி, குறைந்த நுட்பமுடையதை முதலாவதாக வைத்து, வரிசைப்படுத்தி எழுதுக.

(a) $\{41, 0 \cdot 05, 5 \cdot 6, 120\}$

(b) $\{12 \cdot 3, 0 \cdot 003, 241, 8 \cdot 45\}$

(c) $\{0 \cdot 1, 0 \cdot 001, 0 \cdot 10, 1 \cdot 0001\}$

(d) $\{1 \cdot 23, 0 \cdot 123, 12 \cdot 3, 0 \cdot 0123, 123\}$

(2) அடுத்த பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சோடிகளின் ஒவ்வொன்றிலும் எந்த அளவு அதிக நுட்பமுடையது ? எந்த அளவு அதிக நுணுக்கமுடையது ?

(a) 5·0 மி.மீ.; 0·0050 மி.மீ.

(b) 5·0 மீ.; 0·0050 மி.மீ.

(c) 9·5 கிராம் 9·5 செ.மீ.

(d) மனிதனின் உயரம் 1·8 மீ.;
மனைவியின் உயரம் 171 செ.மீ.

(3) இரு அளவுகள் சம நுட்பமுடையவை என்றால், அவைகள் சம எண்ணிக்கையுள்ள பொருளுடைய இலக்கங்களை அவசியம் கொண்டிருக்க வேண்டுமா? எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக.

(4) இரு அளவுகள் சம எண்ணிக்கையுள்ள பொருளுடைய இலக்கங்களைக் கொண்டுள்ளன எனில், அவை சம நுணுக்கமுடையவைகளாக அவசியம் இருக்க வேண்டுமா?

§3. தோராயமான அளவுகளில் வகுத்தல்

ஒரு தோராயமான அளவை, மற்றொரு தோராயமான அளவால் வகுக்கும்போது, இவையிரண்டில், எதற்குக் குறைந்த எண்ணிக்கை பொருளுடைய இலக்கங்கள் உள்ளதோ, அந்த எண்ணிக்கையைவிட அதிகமான பொருளுடைய இலக்கங்களை ஈவில் இருக்கக் கூடாது.

பின் வரும் எடுத்துக்காட்டினைக் கவனி.

43·5 ஐ 12 ஆல் வகு.

[வகுக்கப்படும் எண்ணில் 3 பொருளுடைய இலக்கங்கள் உள்ளன; வகுக்கும் எண்ணில் 2 பொருளுடைய இலக்கங்களே உள்ளன. எனவே, ஈவையும் 2 பொருளுடைய இலக்கங்களுக்குத் திருத்தமாகக் கொடுக்க வேண்டும்.]

```
      3·62
   ┌──────
12 │ 43·5
   │ 36
   ├──────
   │  75
   │  72
   │ ─────
   │   30
   │   24
   │ ─────
```

விடை : 3·6

பயிற்சி 5·4

(1) கீழே கொடுத்துள்ள வகுத்தல்களைச் செய்க. (வகுக்கப்படும் எண்ணும், வகுக்கும் எண்ணும் தோராயமானவைகள்.)

(a) $26 \cdot 8 \div 12$ (b) $274 \div 21$

(c) $81 \cdot 75 \div 3 \cdot 6$ (d) $261 \cdot 32 \div 3 \cdot 26$

(e) $89 \cdot 37 \div 12 \cdot 5$ (f) $9 \cdot 45 \div 0 \cdot 52$

(2) ஒரு செவ்வக நிலத்தின் பரப்பளவு 1554 ச.மீ. அந் நிலத்தின் நீளம் 50·8 மீ. எனில், அதன் அகலமென்ன ?

(3) ஒரு கனச் செவ்வகப் பெட்டியின் கொள்ளளவு 3584 கன செ.மீ. அதன் உயரம் 30·4 செ.மீ. பெட்டியின் அடிப் பரப்பைக் கண்டுபிடி.

(4) பின்வருவனவற்றில், சமன்பாட்டிற்கு இடப்புறமுள்ளவை நன்கு திருத்தப்பட்ட தோராய அளவுகளெனில், எந்தவைகள் சரியாகக் கூறப்பட்டுள்ளன ?

(i) $0 \cdot 148 \div 0 \cdot 02 = 7$

(ii) $1 \cdot 48 \div \cdot 2 = 7 \cdot 4$

§4. ஒரு புதிய குறியீடு

3, 8 ஐ விடச் சிறியது என்பதை $3 < 8$ என்று எழுதுவோம் என உங்களுக்குத் தெரியுமல்லவா ? இதேபோல் 3, 82 ஐ விடச் சிறியது என்பதை $3 < 82$ என எழுதலாம். ஆனால், 3, 82 ஐ விடச் சிறியது என்று கூறுவதைக் காட்டிலும் 3, 82 ஐ விட 'மிகச் சிறியது' என்று கூறுவதுதானே பொருத்தமாக இருக்கும் ? 'மிகச் சிறியது' என்பதைக் காட்ட '$< <$' எனக் குறிப்பது வழக்கம். எனவே, $3 < 82$ என்று எழுதுவதைவிட $3 < < 82$ என எழுதுவது பொருத்தமானதாகும்.

'சிறியது', 'மிகச் சிறியது' என்பவற்றை எதைக் கொண்டு தீர்மானிப்பது என்ற கேள்வி எழுகிறதல்லவா ? மேலுள்ள எடுத்துக்காட்டில், 3, 82-ன் பத்தில் ஒரு பாகத்தைக் காட்டிலும் (அதாவது தோராயமாக 8 ஐக் காட்டிலும்) சிறிதாக உள்ளது. இதேபோல, 'a' ஆனது 'b'-ன் பத்தில் ஒரு பாகத்தைக் காட்டிலும் சிறிதாக இருந்தால், a, b ஐ விட மிகச் சிறியது என்போம்; $a < < b$ என்று குறிப்போம். இதனையே வேறு

விதமாகக் கூறுவதாயின், a-க்கும் b-க்கும் உள்ள விகிதம் $\frac{a}{b}$ ஆனது, $\frac{1}{10}$ ஐ விடக் குறைவாக இருந்தால் 'a' 'b' ஐ விட மிகச் சிறியது எனலாம்.

$c << d$ என்பதை c, d ஐ விட மிகச் சிறியது எனப் படிப்போம்.

கீழே கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டுகளைக் கவனி.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$1{\cdot}03 \times 1{\cdot}04$-ன் தோராய மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும் எனக் கொள்வோம்.

$$\cdot 03 << 1$$

$$\cdot 04 << 1$$

$1{\cdot}03$ ஐ $1 + \cdot 03$ எனவும், $1{\cdot}04$ ஐ $1 + \cdot 04$ எனவும் எழுதலாமல்லவா ?

$$(1 + \cdot 03)\ (1 + \cdot 04) = 1 + \cdot 03 + \cdot 04 + \cdot 0012$$

$\cdot 0012$ என்பது மிகக் குறைவானதால் அதை விட்டு விடுவதால் பெரும் பிழை ஒன்றும் ஏற்பட்டு விடாது. எனவே,

$$(1 + \cdot 03) \times (1 + \cdot 04) \simeq 1 + \cdot 03 + \cdot 04 = 1{\cdot}07$$

என்றே எழுதலாம்

எடுத்துக்காட்டு 2:

$1{\cdot}02 \times 1{\cdot}07$-ன் தோராய மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$$(1 + \cdot 02) \times (1 + \cdot 07) \simeq 1 + \cdot 02 + \cdot 07 = 1{\cdot}09$$

மேற் கூறியவற்றிலிருந்து,

$a << 1$, $b << 1$ என்றால்
$(1 + a)\ (1 + b) \simeq 1 + a + b$

எனத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$.96 \times \cdot 97$-ன் தோராய மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$\cdot 96 = 1 - \cdot 04$

$\cdot 97 = 1 - \cdot 03$

$\therefore \quad \cdot 96 \times \cdot 97 = (1 - \cdot 04) \times (1 - .03)$

$\simeq 1 - \cdot 04 - \cdot 03$ [$\cdot 0012$ மிகச் சிறிய தாகையால் அதனை விட்டுவிட]

$= 1 - \cdot 07$

$= \cdot 93$

$a << 1, \quad b << 1$ எனில்
$(1 - a)(1 - b) \simeq 1 - a - b$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$1 \cdot 02 \times 1 \cdot 05 \times 1 \cdot 04$-ன் தோராய மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$1 \cdot 02 \times 1 \cdot 05 \times 1 \cdot 04 = [(1 + \cdot 02) \times (1 + \cdot 05) \times (1 + \cdot 04)]$

$\simeq (1 + \cdot 02 + \cdot 05) \times (1 + .04)$

$\simeq 1 + \cdot 07 + \cdot 04$ [$\cdot 07$, $\cdot 04$ இவற்றின் பெருக்கல் பலனை $\cdot 0028$ மிகச் சிறியதாகையால் அதனை விட்டுவிட]

$\simeq 1 \cdot 11$

பொதுப்படக் கூறுமிடத்து,

$a << 1, \quad b << 1, \quad c << 1$ எனில்
$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \simeq 1 + a + b + c$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$(1{\cdot}01)^3$-ன் தோராய மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$$
\begin{aligned}
(1{\cdot}01)^3 &= (1 + {\cdot}01)^3 \\
&= (1 + {\cdot}01)(1 + {\cdot}01)(1{\cdot}01) \\
&\simeq (1 + {\cdot}01 + {\cdot}01)(1 + {\cdot}01) \\
&\simeq (1 + {\cdot}02)(1 + {\cdot}01) \\
&\simeq (1 + {\cdot}03) \\
&\simeq 1{\cdot}03
\end{aligned}
$$

இந்த எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, $a << 1$ என்றால் $(1 + a)^3 = 1 + 3a$ என்று தெரிந்து கொள்ளலாம்.

இதேபோல், $(1 + a)^4 = 1 + 4a$ என்றும்,

$(1 + a)^5 = 1 + 5a$ என்றும்,

பொதுவாக, $(1 + a)^n = 1 + na$ என்றும் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

$a << 1$, n ஒரு மிகை முழு எனில்
$(1 + a)^n \simeq 1 + na$
$(1 - a)^n \simeq 1 - na$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$\frac{1}{1{\cdot}02}$-ன் தோராய மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும் எனக் கொள்வோம்.

1ஐ $1{\cdot}02$ ஆல் வகுக்க $\cdot9804$ (நான்கு தசமத்தானத் திருத்தமாக) கிடைக்கிறது. $\cdot0004$ மிகச் சிறியதாகையால் அதனை விட்டு விட்டு .98 ஐத் தோராய மதிப்பாகக் கொள்ளலாம்.

$\frac{1}{1{\cdot}02}$ ஐ $(1{\cdot}02)^{-1}$ என எழுதலாமென்று உங்களுக்குத் தெரியுமல்லவா ?

$$(1{\cdot}02)^{-1} = (1 + {\cdot}02)^{-1} \simeq 1 - {\cdot}02 = {\cdot}98$$

கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளையும் கவனி.

$$\frac{1}{1{\cdot}05} = (1{\cdot}05)^{-1} = (1 + {\cdot}05)^{-1} \simeq 1 - {\cdot}05 = {\cdot}95$$

$$\frac{1}{1{\cdot}07} = (1{\cdot}07)^{-1} = (1 + {\cdot}07)^{-1} \simeq 1 - {\cdot}07 = {\cdot}93$$

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து,

$a << 1$ எனில்
$(1+a)^{-1} \simeq 1 - a$

ஆகும்.

பயிற்சி 5·5

(1) கீழ்வருவனவற்றின் தோராய மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $1{\cdot}02 \times 1{\cdot}07$ (ii) $1{\cdot}06 \times 1{\cdot}03$

(iii) $1{\cdot}04 \times 1{\cdot}05$ (iv) $1{\cdot}09 \times 1{\cdot}01$

(2) பின்வருவனவற்றின் தோராய மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(i) ${\cdot}95 \times {\cdot}92$ (ii) ${\cdot}99 \times {\cdot}94$

(iii) ${\cdot}97 \times {\cdot}96$ (iv) ${\cdot}98 \times {\cdot}93$

(3) கீழே கொடுத்துள்ளவற்றின் தோராய மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $1{\cdot}04 \times 1{\cdot}03 \times 1{\cdot}02$ (ii) $1{\cdot}05 \times 1{\cdot}01 \times 1{\cdot}02$

(iii) $1{\cdot}02 \times 1{\cdot}07 \times 1{\cdot}01$ (iv) $1{\cdot}03 \times 1{\cdot}03 \times 1{\cdot}02$

(4) பின்வருவனவற்றின் தோராய மதிப்புகளைக் கணிக்கவும்.

(i) $(1{\cdot}03)^2$ (ii) $(1{\cdot}02)^3$ (iii) $(1{\cdot}09)^3$

(iv) $(1{\cdot}08)^4$ (v) $(1{\cdot}01)^6$

(5) கீழ்வருவனவற்றின் தோராய மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $\frac{1}{1{\cdot}09}$ (ii) $\frac{1}{1{\cdot}08}$ (iii) $\frac{1}{1{\cdot}06}$ (iv) $\frac{3}{3{\cdot}06}$

(6) பின்வருவனவற்றின் தலைகீழிகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $1{\cdot}04$ (ii) $1{\cdot}05$ (iii) $1{\cdot}01$ (iv) $1{\cdot}009$

வர்க்க மூல அட்டவணை

(1 முதல் 100 முடிய உள்ள முழு எண்களுக்கு)

n	√n	n	√n	n	√n	n	√n
1.	1	26.	5·099	51.	7·141	76.	8·718
2.	1·414	27.	5·196	52.	7·211	77.	8·775
3.	1·732	28.	5·291	53.	7·280	78.	8·832
4.	2·000	29.	5·385	54.	7·348	79.	8·888
5.	2·236	30.	5·477	55.	7·416	80.	8·944
6.	2·449	31.	5·568	56.	7·483	81.	9·000
7.	2·646	32.	5·657	57.	7·550	82.	9·055
8.	2·828	33.	5·745	58.	7·616	83.	9·110
9.	3·000	34.	5·831	59.	7·681	84.	9·165
10.	3·162	35.	5·916	60.	7·746	85.	9·220
11.	3·317	36.	6·000	61.	7·810	86.	9·274
12.	3·464	37.	6·083	62.	7·874	87.	9·327
13	3·606	38.	6·164	63.	7·937	88.	9·381
14.	3·742	39.	6·245	64.	8·000	89.	9·434
15.	3·873	40.	6·325	65.	8·062	90.	9·487
16.	4·000	41.	6·403	66.	8·124	91.	9·539
17.	4·123	42.	6·481	67.	8·185	92.	9·592
18.	4·243	43.	6·557	68.	8·246	93.	9·644
19.	4·359	44.	6·633	69.	8·307	94.	9.695
20.	4·472	45.	6·708	70.	8·367	95.	9·747
21.	4·583	46.	6·782	71.	8·426	96.	9·798
22.	4·690	47.	6·856	72.	8·485	97.	9·849
23.	4·796	48.	6·928	73.	8·544	98.	9·899
24.	4·899	49.	7·000	74.	8·602	99.	9·950
25.	5·000	50.	7·071	75.	8·660	100.	10·000

6. தொடக்க எண்ணியல்

§1. வகு எண்கள், பகா எண்கள், பகு எண்கள், காரணிகள், பகா காரணிகள், பகு காரணிகள், சார்பகா எண்கள் - இவை பற்றி முன் வகுப்பில் கற்றறிந்தவற்றை மீண்டும் சுருக்கமாக நினைவுபடுத்திக் கொள்வோம்.

2, 8 ஐ வகுக்கும் என்பதைக் குறியீட்டு மொழியில் $2 \mid 8$ என்றுஎழுதுவோமல்லவா ?

$1 \mid 8$, $2 \mid 8$, $4 \mid 8$, $8 \mid 8$ என்பதனுல், 1, 2, 4, 8 இவற்றை 8-ன் வகு எண்கள் என்போம். 8-ன் வகு எண்கள் கணத்தை $D(8)$ என்று குறித்தால், $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$ ஆகும்.

ஒரு முழு எண்ணின் வகு எண்கள் கணத்தில் இரண்டே இரண்டு உறுப்புகள் மாத்திரம் இருந்தால் அந்த எண்ணைப் பகா எண் (Prime number) என்றும், இரண்டிற்கு மேல் இருந்தால் அந்த எண்ணைப் பகு எண் (Composite number) என்றும் கூறுவோம்.

$D(13) = \{1, 13\}$. எனவே 13 ஒரு பகா எண்.

$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. எனவே 12 ஒரு பகு எண்.

$D(1) = \{1\}$. எனவே 1 மேலுள்ள இலக்கணத்தின்படி பகா எண்ணும் அல்ல ; பகு எண்ணும் அல்ல.

'1' அலகு (unit) எனப்படும்.

'a' ஓர் இயல் எண் எனில் பின்வரும் மூன்றினுள் ஏதேனும் ஒன்றுதான் உண்மையாக இருக்க முடியும்.

(i) $a = 1$, (ii) a, ஒரு பகா எண், (iii) a, ஒரு பகு எண்.

ஓர் எண்ணை, அதனின்று வேறுபட்ட இரண்டு எண்களின் பெருக்கல் பலனுகக் கூறும் பொழுது அந்த எண்ணைக் காரணிப் படுத்திய வடிவில் குறித்திருப்பதாகக் கூறுவோம் ; அவ்விரண்டு எண்களையும் முதலில் எடுத்துக் கொண்ட எண்ணின் காரணிகள் என்று கூறுவோம்.

$24 = 2 \times 12$; எனவே 2-ம், 12-ம், 24-ன் காரணிகள்.

$24 = 3 \times 8$; எனவே 3-ம், 8-ம், 24-ன் காரணிகள்.

$24 = 4 \times 6$; எனவே 4-ம், 6-ம், 24-ன் காரணிகள்.

[1-ம், 24-ம், 24-ன் வகு எண்கள் ; ஆனுல் 1-ம், 24-ம், 24-ன் காரணிகள் அல்ல என்பதை நோக்குக.]

மேலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து, ஒரே பகு எண்ணை வெவ்வேறு விதங்களில் காரணிப்படுத்திய வடிவில் குறிக்கலா மென்பது புலனாகும்.

ஓர் எண்ணைக் காரணிப் படுத்தி எழுதும்பொழுது,

(i) அதன் காரணிகள் இரண்டும் பகா எண்களாக இருக்க லாம்; [(எ.கா.) $21 = 3 \times 7$].

(ii) அல்லது, ஒரு காரணி பகு எண்ணாகவும், மற்றது பகா எண்ணாகவும் இருக்கலாம்; [(எ.கா.) $24 = 3 \times 8$].

(iii) அல்லது இரண்டு காரணிகளும் பகு எண்களாக இருக்கலாம்; [(எ.கா.) $24 = 4 \times 6$].

நிலை (ii), நிலை (iii) இவற்றில் பகு எண்ணாக (அல்லது பகு எண்களாக) உள்ள காரணியை (காரணிகளை) மீண்டும் காரணிப் படுத்தி எழுத முடியும். இவ்வாறு தொடர்ந்து காரணிப்படுத்தி வருகையில், எந்த ஒரு காரணியையும் மீண்டும் காரணிப்படுத்த முடியாத நிலை ஏற்படுமல்லவா? அந் நிலையில் கொடுத்துள்ள எண்ணை, முழுவதும் காரணிப்படுத்தி இருப்பதாகக் கூறுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\left.\begin{aligned} 24 &= 12 \times 2 \\ 24 &= 3 \times 8 \\ 24 &= 4 \times 6 \end{aligned}\right\} \text{ காரணிப் படுத்திய வடிவம்.}$$

$$\left.\begin{aligned} 24 &= 2 \times [2 \times (2 \times 3)] = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 24 &= 3 \times [2 \times (2 \times 2)] = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \\ 24 &= (2 \times 2) \times (2 \times 3) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \end{aligned}\right\}$$

(முழுவதும் காரணிப்படுத்திய வடிவம்)

ஒரு பகு எண்ணை முழுவதும் காரணிப்படுத்திய வடிவத்தில் குறிக்கையில், எல்லா எண்களும் பகா எண்களாகத்தானே இருக்க வேண்டும்? எனவே, முழுவதும் காரணிப்படுத்திய வடிவத்தையே நாம் பகாக் காரணிப்படுத்திய வடிவம் என்றும் கூறுவோம்.

ஒரு பகு எண்ணைக் காரணிப்படுத்தி எழுதும் பொழுது அதன் காரணிகள் எல்லாம் பகா எண்களாகவோ அல்லது பகா எண்

களின் அடுக்குகளாகவோ இருந்தால், அதைப் பகாக் காரணிப் படுத்திய வடிவில் இருப்பதாகக் கூறுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

எடுத்துகாட்டு 2 :

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

அடுக்குப் பகா வகு எண் (Primary Divisor)

24-ன் வகு எண்கள் 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 ஆகும். இவற்றுள் பகா எண்கள் 2, 3 ; மற்றவற்றில் 4 ஐ 2^2 என்றும், 8 ஐ 2^3 என்றும் ஒரு பகா எண்ணின் அடுக்காக எழுதலாம்; 6, 12, 24 — இவற்றை ஒரே பகா எண்ணின் அடுக்காக எழுத முடியாது.

2, 3, 2^2, 2^3 – இவற்றை 24-ன் அடுக்குப் பகா வகு எண்கள் என்போம்.

24-ன் அடுக்குப் பகா வகு எண்களின் கணத்தை $P(24)$ என்று குறித்தால், $P(24) = \{2, 3, 2^2, 2^3\}$

மற்றோர் எடுத்துக்காட்டு :

$$D(90) = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$$

$$\therefore\ P(90) = \{2, 3, 5, 3^2\}$$

ஒரு பகா எண்ணோ, அல்லது ஒரு பகா எண்ணின் அடுக்கோ கொடுத்துள்ள வகு எண்ணாக இருந்தால், அந்த எண்ணை, கொடுத்துள்ள எண்ணின் அடுக்குப் பகா வகு எண் என்போம்.

எண் கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றம்

$$24 = 2 \times 12 = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

$$24 = 3 \times 8 = 3 \times 2 \times 4 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^3$$

$$24 = 4 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

மேலுள்ள எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, 24 ஐ எம்முறையில் பகாக் காரணிப் படுத்தினாலும் அதன் அடுக்குப் பகா வகு எண்கள் கணத்தின் உறுப்புகளாக 2, 2^2, 2^3, 3 இவை மாத்திரமே வருகின்றன எனக் காணலாம்.

இதேபோல், எந்த ஒரு பகு எண்ணை எடுத்துக் கொண்டு, அதை எவ் வழியில் பகாக் காரணிப் படுத்திப் பார்த்தாலும் அவ் வெண்ணின் அடுக்குப் பகா வகு எண்கள் கணங்கள் சம கணங் களாக இருக்கும். இதனையே நாம் எண் கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றம் என்போம்.

மிக முக்கியமான இத் தேற்றத்தின் நிரூபணத்தை மேல் வகுப்பில் கற்றுக் கொள்வீர்கள்.

சார்பகா எண்கள் (Relative Primes)

இரண்டு எண்களிற்கு, ஒரே ஒரு வகு எண் மாத்திரம் பொது வாக இருந்தால், அந்த இரண்டு எண்களையும் சார்பகா எண்கள் என்போம். வேறுவிதமாகக் கூறுமிடத்து இரண்டு எண்களின் வகு எண்களின் வெட்டுக் கணம் ஒரே ஓர் உறுப்புக் கொண்ட கணம் என்றால், அந்த இரண்டு எண்களும் சார்பகா எண் களாகும்.

1, எல்லா எண்களுக்கும் வகு எண் என்பதனால், இரண்டு சார்பகா எண்களின் வெட்டுக் கணத்தின் ஒரே ஓர் உறுப்பு, 1 என்ற எண்ணாகத்தானே இருக்க வேண்டும் ?

$D(a) \cap D(b) = \{1\}$ *என்றால், a-ம் b-ம் சார்பகா எண் களாகும்.*

எடுத்துக்காட்டு 1 :

7-ம் 11-ம் சார்பகா எண்களா ?

$$D(7) = \{1, 7\}$$
$$D(11) = \{1, 11\}$$

$$\therefore \quad D(7) \cap D(11) = \{1, 7\} \cap \{1, 11\} = \{1\}$$

எனவே, *7-ம் 11-ம் சார்பகா எண்களாகும்.*

எடுத்துக்காட்டு 2 :

12-ம், 16-ம் சார்பகா எண்களா ?

$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$
$$D(16) = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

$$\therefore \quad D(12) \cap D(16) = \{1, 2, 4\}$$

எனவே, *12-ம் 16-ம் சார்பகா எண்களல்ல.*

எடுத்துக்காட்டு 3 :

a-ம், b-ம் பகா எண்களெனில், அவை சார்பகா எண்கள் என நிரூபி. $(a \neq b)$

a ஒரு பகா எண், எனவே $D\{a\} = \{1, a\}$

b ஒரு பகா எண், எனவே $D\{b\} = \{1, b\}$

$\therefore \quad D(a) \cap D(b) = \{1, a\} \cap \{1, b\} = \{1\}$

$\therefore$ a-ம் b-ம் சார்பகா எண்களாகும்.

இரண்டு சார்பகா எண்கள் கொடுக்கப்பட்டால்,

(1) இரண்டு எண்களுமே பகா எண்களாக இருக்கலாம்.

(2) ஒன்று பகா எண்ணாகவும், மற்றது பகு எண்ணாகவும் இருக்கலாம்.

(3) இரண்டு எண்களுமே பகு எண்களாக இருக்கலாம்.

இரண்டு பகா எண்கள், சார்பகா எண்களாகவும் இருக்க வேண்டும்; ஆனால் இரண்டு சார்பகா எண்கள் பகா எண்களாக இருக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை.

இதுவரை நாம் எடுத்துக் கொண்ட எண்கள் இயல் எண்களே. இனி முழுக்களை எடுத்துக் கொண்டு, மேற் கூறிய கருத்துகள் எவ்விதம் நீட்சி செய்யப்படுகின்றன என்று காண்போம்.

Z-ல் $a \mid b$ எனில், $b = ak$, $k \in Z$ என்று பொருள். இங்கு k மிகை எண்ணாகவோ, குறை எண்ணாகவோ இருக்கலாம். இங்கும், இனியும் பூச்சியமல்லா முழுக்களைத்தான் நாம் எடுத்துக் கொள்வோம்.

Z-ல், $D(13) = \{1, -1, 13, -13\}$

$D(-12) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12\}$

ஆகவே Z-ல் ஓர் எண் பகா எண்ணாக இருக்க வேண்டுமாயின், அதன் வகு எண்களின் கணத்தில் இரண்டே இரண்டு மிகை எண்கள் இருத்தல் வேண்டும்.

Z-ல் ஓர் எண் பகு எண்ணாக இருக்க வேண்டுமாயின், அதன் வகு எண்களின் கணத்தில் இரண்டுக்கு மேற்பட்ட மிகை எண்கள் இருத்தல் வேண்டும்.

$$D(-6) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, \}$$

இங்கு 1, 2, 3, 6 என்ற நான்கு மிகை வகு எண்கள் உள்ளன. எனவே −6 ஒரு பகு எண்ணாகும்.

$$D(1) = \{1, -1\}, \quad D(-1) = \{1, -1\}.$$

இங்கு ஒரேயொரு மிகை வகு எண்தான் உள்ளது. ஆகவே, 1-ம், −1-ம் பகு எண்களுமல்ல. பகா எண்களுமல்ல. இவை அலகுகள் எனப்படும்.

ஓர் எண்ணின் காரணிப்படுத்திய வடிவத்தில்,

(i) எல்லாக் காரணிகளையும் மிகை எண்களாக எடுத்துக் கொள்ள முடியும் — இந் நிலையில் கொடுத்துள்ள எண் மிகை எண்ணாக இருக்கும்.

அல்லது,

(ii) ஒரேயொரு காரணி மட்டும் குறை எண்ணாகவும், மற்றவை மிகை எண் காரணிகளாகவும் எடுத்துக் கொள்ள முடியும் — இந்நிலையில், கொடுத்துள்ள எண் குறை எண்ணாக இருக்கும்.

எண் கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றத்தின் விவரமும், N-ல் உள்ளபடியே Z யிலும் அமைகிறது.

Z-ல் சார்பகா எண்கள் :

$a \in Z$, $b \in Z$ என்க.

$D(a) \cap D(b)$ என்ற கணம் $\{1, -1\}$ ஆக இருந்தால், a, b என்பன சார்பகா எண்கள் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) −15, −28

(ii) −13, −29

என்பன சார்பகா எண்கள்.

இரு முழுக்களின் மீ.பொ.வ. என்பது, அவற்றின் வகு எண்களின் வெட்டுக் கணத்திலுள்ள மிகப் பெரிய எண். இது எப்போதும் மிகை எண்ணாகவே இருக்கும். (ஏன்?)

எடுத்துக்காட்டாக, $-15, 40$ ஆகியவற்றின் மீ. பொ. வ. காண வேண்டும் என்க :

$$D(-15) = \{ \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15 \}$$

$$D(40) = \{ \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 40 \}$$

$$D(-15) \cap D(40) = \{ \pm 1, \pm 5 \}$$

$$= \{ -5, -1, 1, 5 \}$$

எனவே $-15, 40$ ஆகியவற்றின் மீ. பொ. வ. 5.

இரு முழுக்களின் மீ. பொ. ம. என்பது, அவற்றின் மடங்குகளின் கணங்களின் வெட்டுக் கணத்திலுள்ள மிகச் சிறிய மிகை எண்.

எடுத்துக்காட்டாக, $14, -6$ இவற்றின் மீ. பொ. ம. காண வேண்டும் என்க :

14-ன் மடங்குகளின் கணம்

$$\{ 0, \pm 14, \pm 28, \pm 42, \pm 56 \ldots \}$$

-6-ன் மடங்குகளின் கணம்

$$\{ 0, \pm 6, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 30, \pm 36, \pm 42 \ldots \}$$

இவற்றின் வெட்டுக் கணம்

$$\{ 0, \pm 42, \pm 84, \ldots \}$$

இதன் மீச் சிறு மிகை எண் 42. எனவே $14, -6$ இவற்றின் மீ. பொ. ம. 42.

பயிற்சி 6·1

(1) (i) 16, 27 (ii) 48, 72 (iii) 1728, 729 ஆகிய எண் சோடிகளுக்கு மீ. பொ. வ., மீ. பொ. ம. காண்க.

(2) பின்வரும் சோடிகள் சார்பகா எண்களா என ஆராய்க.

(i) 8, 15 (ii) 46, 69 (iii) 51, 85 (iv) 111, 11

(v) 999, 6300 (vi) 497, 192 (vii) 8594, 21.

(3) $-16, -25, -56$ ஆகிய எண்களின் வகு எண் கணங்களைக் காண்க.

(4) பின்வரும் எண் சோடிகளுக்கு மீ. பொ. வ. காண்க.

(i) $-16, -25$ (ii) $-16, -56$

(5) பின்வரும் சோடிகளுக்கு மீ. பொ. ம. காண்க.

(i) $-16, -25$ (ii) $-16, 56$

§2. எண்ணியலில் ஓர் எளிதான தேற்றம்

எல்லா பகு எண்களையும், தகுந்த பகா எண்களின் பெருக்கல் பலனாக எழுத முடியும் என்பதனால், பகா எண்களைப் பற்றிய உண்மைகளைக் கண்டறிவதில் கணித வல்லுநர்கள் அதிகக் கவனம் செலுத்தி வந்துள்ளனர். அதன் விளைவாகக் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட தேற்றங்களில் எளிதான ஒரு தேற்றத்தை நாம் இங்குக் கற்றுக் கொள்வோம்.

தேற்றம் :

பகா எண்களின் கணம் ஒரு முடிவுறாக் கணம் ஆகும்.

நிரூபணம் :

பகா எண்களின் கணம் முடிவுறாக் கணம் அல்ல எனக் கொள்வோம்.

அப்பொழுது அது ஒரு முடிவுறும் கணமாக இருக்க வேண்டும்.

எல்லாப் பகா எண்களும் கொண்ட முடிவுறும் அக் கணத்தை $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ என்று குறிப்போம். $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1$ என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்க. இந்த எண்ணை a என்போம்.

$$p_1 < a, \; p_2 < a, \; p_3 < a \dots p_n < a$$

என்பது தெளிவு. $a \neq 1$ என்பதால் a ஒரு பகா எண்ணாகவோ, அன்றி பகு எண்ணாகவோ இருக்க வேண்டும்.

நிலை 1 : a ஒரு பகா எண் என்க.

அப்பொழுது a ஆனது $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ இவற்றிலிருந்து வேறுபட்ட ஒரு பகா எண்ணாகும். அதாவது $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ என்பது எல்லா பகா எண்களும் கொண்ட கணமாக இருக்க முடியாது. ஆனால், இது நாம் எடுத்துக் கொண்ட கொள்கைக்கு (அதாவது, $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ என்பது எல்லாப் பகா எண்களும் கொண்ட கணம் என்பதற்கு) முரணாக உள்ளது.

நிலை 2 : a ஒரு பகு எண் என்க.

a ஒரு பகு எண் எனில், $q \mid a$ என இருக்குமாறு q என்ற ஒரு பகா எண் இருக்க வேண்டும்.

$q = p_1$ என்றால், $q \mid (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots, p_n)$; மேலும் $q \mid a$.

எனவே $q \mid (a - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots, p_n)$.

அதாவது $q \mid 1$.

ஆனால் $q \nmid 1$. இது ஒரு முரண்பாடு. எனவே $q = p_1$ என்பது மெய்யல்ல; (அதாவது) $q \neq p_1$. இதேபோல், $q \neq p_2$, $q \neq p_3, \ldots, q \neq p_n$ என நிரூபிக்கலாம்.

ஆகவே q ஆனது $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ இவற்றிலிருந்து வேறுபட்ட ஒரு பகா எண்ணாகும். அப்பொழுது $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$ எல்லாப் பகா எண்களையும் கொண்ட கணம் என்பதாகாது. ஆனால் இதுவும் $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$ எல்லாப் பகா எண்களையும் கொண்ட கணம் என்ற கொள்கைக்கு முரணாகும்.

எனவே, இரு நிலைகளிலும், முதலில் எடுத்துக்கொண்ட கொள்கைக்கு முரணான முடிவுகளே வருவதால் எடுத்துக் கொண்ட கொள்கை தவறாக இருக்க வேண்டும். அதாவது பகா எண்களின் கணம் ஒரு முடிவுறும் கணம் என்பது தவறாகும்.

ஆகவே பகா எண்களின் கணம் ஒரு முடிவுறாக் கணமாகத்தான் இருக்க வேண்டும்.

... ...

பகா எண்களின் கணம் ஒரு முடிவுறாக் கணம் என்றால் கடைசி பகா எண் என்றோ அல்லது மிகப் பெரிய பகா எண் என்றோ எந்த ஒரு பகா எண்ணும் இருக்க முடியாது

3. வகு எண்களும் அவற்றின் பண்புகளும்

இலக்கணம் 1 : $a = bk$ என்றிருக்குமாறு, k என்ற ஒரு முழு இருந்தால் — இருந்தால் மாத்திரமே — முழு b, முழு a ஐ வகுக்கிறது என்போம்; அதை $b \mid a$ என்று குறிப்போம்.

இலக்கணம் 2 : $b \mid a$ என இருந்தால் — இருந்தால் மாத்திரமே — முழு b ஐ முழு a-ன் வகு எண் என்போம்.

இலக்கணம் 3 : $b \mid a$ என இருந்தால் — இருந்தால் மாத்திரமே — முழு a ஐ முழு b-ன் மடங்கு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$3 \mid 15$; ஏனெனில் $15 = 3 \times 5$

எனவே 3 : 15-ன் ஒரு வகு எண் ஆகும்.

15; 3-ன் ஒரு மடங்கு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$3 \nmid 10$; ஏனெனில், எந்த ஒரு முழு k-க்கும் $10 \neq 3k$.

$b \mid a$ என்பது உண்மையில் ஒரு கணித வாக்கியமாகும். (மெய்யாகவோ, அன்றி மெய்யற்றதாகவோ இருக்கலாம்.) $b \mid a$ என்பது ஓர் எண் அல்ல; 'வகுக்கும்' என்பது 'b' 'a' இவற்றிற்குள்ள ஓர் உறவினைக் குறிக்கிறது; ஓர் உறுப்பு செயலைக் குறிக்காது. எனவே $3 \mid 15 = 5$ என எழுதுவதைத் தவிர்க்க வேண்டும்.

கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளைக் கவனமாகப் படிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$3 \mid 12,\ 12 \mid 24;\ \ 3 \mid 24$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$7 \mid 21,\ 21 \mid 105;\ \ 7 \mid 105$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$6 \mid 24,\ 24 \mid 144;\ \ 6 \mid 144$

மேலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து,

பண்பு 1 : a, b, c என்பன ஏதேனும் மூன்று முழுக்கள் எனில், $a \mid b,\ b \mid c$ என இருந்தால், $a \mid c$ என்பதை நாம் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

பண்பு 2 : $a \mid b,\ b \mid a$ என்றால், 'a'-ம், 'b'-ம் இரு வேறு எண்களாக இருக்க முடியுமா எனச் சோதித்துப் பார்க்க, $a \mid b,\ b \mid a$ என்றால், $a = b$ என்ற உண்மை புலப்படும்.

பண்பு 3 : $a \mid b$, $a \mid c$ என இருக்குமாறு, a, b, c இவற்றிற்கு முழுக்களின் கணத்திலிருந்து தகுந்த மதிப்புகளையும், p, q இவையிரண்டிற்கும் இயல் எண்களின் கணத்திலிருந்து எந்த மதிப்புகளையும் கொடுத்துப் பின்வரும் அட்டவணையைச் சரியாக நிரப்புக.

நிலை	a	b	c	p	q	pb	qc	$pb + qc$	$a \mid (pb+qc)$ என்பது மெய்தானா ?
1.	2	8	10	3	4	24	40	64	மெய்
2.	6	12	18	6	5	72	90	162	மெய்
3.	7	49	56	1	1	49	56	105	மெய்
4.	5	...	...	...	...	...	...	...	...
5.	−2	...	...	...	...	...	...	...	...
6.	9	...	...	...	...	...	...	...	...
7.	−13	...	...	...	...	...	...	...	...
8.	...	...	...	...	...	...	...	...	...
9.	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10.	...	...	...	...	...	...	...	...	...

மேலுள்ள அட்டவணையில், கடைசி நிலை வரிசையில் எப்பொழுதுமே மெய் என்ற விடை வருகிறதா ?

$a \mid b$, $a \mid c$ என்றால், p, q என்பன எந்த இரு இயல் எண்களாயினும் $a \mid (pb+qc)$ என அறிந்து கொள்ளலாம்.

இம்மாதிரியே,

$a \mid b$, $a \mid c$ என்றால், p, q என்பன எந்த இரு இயல் எண்களாயினும் $a \mid (pb - qc)$ என்றும் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

[குறிப்பு : மேலுள்ளவற்றில், $p = 1$, $q = 1$ என்ற விசேட நிலையைக் கவனிப்போம்.

இந் நிலையில், (i) $a \mid b$, $a \mid c$ என்றால் $a \mid (b+c)$

(ii) $a \mid b$, $a \mid c$ என்றால் $a \mid (b-c)$

இவற்றையே, சொற்களில் பின்வருமாறு கூறலாம்.

ஓர் எண், வேறு இரண்டு எண்களைத் தனித்தனியே வகுக்கு மெனில், அந்த எண், அவ்விரு எண்களின் கூட்டுத் தொகை யையும் (அல்லது வித்தியாசத்தையும்) வகுக்கும்.]

பண்பு 4 : $a \mid b$ மேலும் $a \mid (b+c)$ என்றால், $a \mid c$.

நிரூபணம் :

b ஒரு முழு, c ஒரு முழு எனில் $(b+c)$-ம் ஒரு முழுவாகும்.

$b + c = d$ என்க.

$a \mid d$, மேலும் $a \mid b$ என்றால், $a \mid (d-b)$ ... [(பண்பு 3) குறிப்பு]

(அதாவது) $a \mid (b + c - b)$

(அதாவது) $a \mid c$.

ஆகவே, $a \mid b$, மேலும் $a \mid (b+c)$ என்றால், $a \mid c$.

பண்பு 5 : a, c ஐ வகுக்குமாறும், b-ம் c ஐ வகுக்குமாறும், மேலும் a-ம், b-ம் சார்பகா எண்களாக இருக்குமாறும் a, b, c— இவற்றிற்குத் தகுந்த மதிப்புகள் கொடுத்துப் பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்புக.

நிலை	a	b	c	ab	$ab \mid c$ என்பது மெய்
1.	2	3	24	6	மெய்
2.	3	5	30	15	மெய்
3.	4	7	56	28	மெய்
4.	5	6	...	...	...
5.	8	...	...	...	...
6.	...	...	...	...	...
7.	...	...	...	...	...
8.	...	...	...	...	...
9.	...	...	...	...	...
10.	...	...	...	...	...

முன் பக்கத்திலுள்ள அட்டவணையில் கடைசி நிலை வரிசையில் எப்பொழுதும் 'மெய்' என்ற விடை வருகிறதா ?

$a \mid c$, $b \mid c$. மேலும் a -ம், b-ம் சார்பகா எண்களெனில், $ab \mid c$ எனத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

பண்பு 6 : $ac \mid bc$ என்றால், $a \mid b$.

நிரூபணம் :

$ac \mid bc$ என்றால் k என்ற ஒரு தகுந்த முழுவிற்கு $bc = kac$.

$$\Rightarrow \frac{bc}{c} = \frac{kac}{c}$$

$$\Rightarrow b = ka$$

$$\Rightarrow a \mid b.$$

எனவே, $ac \mid bc$ எனில், $a \mid b$.

பண்பு 7 : 6 ஆம் பண்பின் மறுதலையாக,

$a \mid b$, $c \neq 0$ என்றால், $ac \mid bc$.

நிரூபணம் :

$a \mid b$. எனவே, $b = ka$.

$$\Rightarrow bc = (ka)c = k(ac)$$

$$\Rightarrow ac \mid bc.$$

பயிற்சி 6·2

அடியிலுள்ள கணக்குகளில் a, b, c என்பன பூச்சியமற்ற முழுக்கள்.

(1) $a \mid b$, $a \mid c$ எனில், $a \mid bc$ என்று நிரூபிக்க.

(2) $a \mid bc$ எனில், $a \mid b$ அல்லது $a \mid c$.

இது மெய்யான கூற்று ? ஆம் எனில், நிரூபணம் தருக. இல்லையெனில், மறுப்பு உதாரணம் தருக.

(3) $a \mid b$, $b \mid a$ எனில், $a = \pm b$ என்று நிரூபிக்க.

(4) $a \mid b$, $a \mid c$ எனில், $a \mid (b + c)$ என்று நிரூபிக்க.

(5) $a \mid b$, $a \mid c$ எனில், $a \mid (pb + qc)$, $p \in Z$, $q \in Z$ என்று நிரூபிக்க.

(6) $c \mid ab$, மேலும் c, a என்பன சார்பகா எண்கள் எனில், $c \mid b$ என்று எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் சரிபார்க்க.

§4. ஃபேரி தொடர் வரிசைகள் (Farey Sequences)

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பின்னங்களின் தொடர் வரிசையினைக் கவனி.

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}$$

4 அல்லது 4 ஐ விடக் குறைவான எண்ணைப் பகுதியாகக் கொண்ட, சுருங்கிய வடிவில் உள்ள எல்லா தகு பின்னங்களும் ஏறு வரிசையில் எழுதப்பட்டுள்ளன. இவ்வரிசையை, நாம் 4 நிலை ஃபேரி தொடர் வரிசை என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

5 நிலை ஃபேரி தொடர் வரிசையினை எழுதுக.

5 ஐப் பகுதியாகக் கொண்ட, சுருங்கிய வடிவில் உள்ள தகு பின்னங்கள் : $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$.

4 ஐப் பகுதியாகக் கொண்ட சுருங்கிய வடிவில் உள்ள தகு பின்னங்கள் : $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$.

3 ஐப் பகுதியாகக் கொண்ட சுருங்கிய வடிவில் உள்ள தகு பின்னங்கள் : $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

2 ஐப் பகுதியாகக் கொண்ட சுருங்கிய வடிவில் உள்ள தகு பின்னம் : $\frac{1}{2}$.

மேலுள்ள எல்லாப் பின்னங்களையும் மிகச் சிறியதில் தொடங்கி, ஏறு வரிசையில் எழுத,

$$\frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5}$$

கிடைக்கும்.

இதுவே, 5 நிலை ஃபேரி தொடர் வரிசையாகும். இவ்வாறே 6 நிலை, 7 நிலை, ... ஃபேரி தொடர் வரிசைகளை அமைக்கலாம்.

ஃபேரி தொடர் வரிசைகளின் சில பண்புகள்

பண்பு 1 : ஃபேரி தொடர் வரிசையில், $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று அடுத்தடுத்த பின்னங்கள் என்றால், $a'b - ab' = 1$; $a''b' - a'b'' = 1$.

எடுத்துக்காட்டாக, 5 நிலை ஃபேரி தொடர் வரிசையில், $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ என்ற மூன்று அடுத்தடுத்த பின்னங்களை எடுத்துக் கொண்டால்,

(i) $(1 \times 5) - (2 \times 2) = 1$

(ii) $(3 \times 2) - (1 \times 5) = 1$.

பண்பு 2 : அடுத்தடுத்துள்ள இரு ஃபேரி பின்னங்களின் பகுதிகள் சார்பகா எண்களாகும். b-ம் b'-ம் சார்பகா எண்களாகும். b', b''-ம் கூட சார்பகா எண்களாகும்.

பண்பு 3 : முதல் பண்பிலிருந்து,

$$a'b - ab' = a''b' - a'b''$$

(அதாவது) $a'b + a'b'' = a''b' + ab'$

(அதாவது) $a'(b + b'') = b'(a'' + a)$

(அதாவது) $\frac{a'}{b'} = \frac{a + a''}{b + b''}$

எனவே, ஃபேரி தொடர் வரிசையில் மூன்று அடுத்தடுத்த பின்னங்களை எடுத்துக் கொண்டால், முதல் பின்னம், மூன்றாவது பின்னம் இவற்றின் தொகுதிகளைக் கூட்டி வரும் தொகையைத் தொகுதியாகவும், பகுதிகளைக் கூட்டி வரும் தொகையைப் பகுதியாகவும் கொண்டு அமைக்கப்படும் பின்னம் நடு பின்னத்திற்குச் சமமாகும்.

எடுத்துக் காட்டாக, $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ என்பனவற்றை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{2+3}{5+5} = \frac{1}{2}.$$

பண்பு 4 : ஃபேரி தொடர் வரிசையில் ஏதேனும் இரு பின்னங்களின் கூட்டுத்தொகை 1 என்றால் அப்பொழுது, அவற்றுள் சிறிய பின்னத்திற்கு அடுத்துவரும் பின்னம், பெரிய பின்னத்திற்கு முந்திய பின்னம் இவற்றின் கூட்டுத் தொகையும் கூட 1 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 5 நிலை ஃபேரி தொடர் வரிசையில்,

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1.$$

தொடர் வரிசையில், $\frac{1}{5}$-க்கு அடுத்த பின்னம் $\frac{1}{4}$ ஆகும்.

தொடர் வரிசையில், $\frac{4}{5}$-க்கு முந்திய பின்னம் $\frac{3}{4}$ ஆகும்.

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

பயிற்சி 6·3

(1) 6 நிலை, 7 நிலை, 9 நிலை ஃபேரி தொடர் வரிசைகளை எழுதுக.

(2) எந்நிலை ஃபேரி தொடர் வரிசையிலும் உள்ள பின்னங்களின் எண்ணிக்கை ஒற்றை. இது மெய்யானதா ?

(3) முதல் கணக்கிலுள்ள தொடர் வரிசைகளுக்கு, மேற்கூறிய நான்கு பண்புகளும் உள்ளனவா என்று சரிபார்க்க.

§5. இரு இயல் எண்களின் மீப்பெரு பொது வகு எண் : மீச் சிறு பொது மடங்கு :

இரண்டு இயல் எண்களுக்கு எவ்வாறு மீப்பெரு பொது வகு எண் கண்டு பிடிப்பது, மீச்சிறு பொது மடங்கு கண்டு பிடிப்பது எனச் சென்ற வகுப்பில் கற்றுக் கொண்டவற்றை மீண்டும் நினைவு படுத்திக் கொண்டு அவற்றிற்குள்ள தொடர்பினைத் தெரிந்து கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

15, 21-ன் மீ. பொ. வ., மீ. பொ. ம. இவற்றைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $D(15) = \{1, 3, 5, 15\}$

$D(21) = \{1, 3, 7, 21\}$

∴ பொது வகு எண்களின் கணம்.

$$D(15) \cap D(21) = \{1, 3\}$$

மீப்பெரு பொது வகு எண் = 3.

15-ன் மடங்குகளின் கணம் { 15, 30, 45, ... }

21-ன் மடங்குகளின் கணம் { 21, 42, 63, ... }

∴ பொது மடங்குகளின் கணம் { 105, 210, ... }

∴ மீச்சிறு பொது மடங்கு = 105.

மீ. பொ. வ. × மீ. பொ. ம. = 3 × 105 = 315

மேலும், 15 × 21 = 315

எனவே 15, 21-ன் பெருக்கல் பலன், அவற்றின் மீ. பொ. வ., மீ. பொ. ம. ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலனுக்குச் சமம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

36, 54 இவற்றின் மீ. பொ. வ., மீ. பொ. ம. வைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

$D(54) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$

∴ பொது வகு எண்களின் கணம், $D(36) \cap D(54)$

$= \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

மீப்பெரு பொது வகு எண் = 18.

36-ன் மடங்குகளின் கணம் { 36, 72, 108, 144, 180, ... }

54-ன் மடங்குகளின் கணம் { 54, 108, 162, 216, ... }

∴ பொது மடங்குகளின் கணம் { 108, 216, ... }

மீச்சிறு பொது மடங்கு = 108

மீ. பொ. வ. × மீ. பொ. ம. = 18 × 108 = 1944

மேலும், 36 × 54 = 1944

எனவே, 36, 54-ன் பெருக்கற்பலன் அவற்றின் மீ. பொ. வ., மீ. பொ. ம. ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமம்.

இவை போன்ற பல எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் இரு இயல் எண்களின் பெருக்குத் தொகையானது அவ்விரு இயல் எண்களின் மீ. பொ. வ., மீ. பொ. ம. ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம் என்பதைத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 6·4

(1) அடியிற்கண்ட எண் சோடிகளுக்கு மீ. பொ. வ., மீ. பொ. ம. காண்க. பிறகு அடியிலுள்ள அட்டவணையை நிரப்புக.

(i) 15, 35 (ii) 192, 64 (iii) 48, 64

(iv) 108, 42. (v) 169, 39 (vi) 68, 51

எண் a	எண் b	இவற்றின் மீ. பொ. வ.	இவற்றின் மீ. பொ. ம.	மீ. பொ. வ. x மீ. பொ. ம	$a \times b$
(i) 15	35				
(ii)					
(iii)					
(iv)					
(v)					
(vi)					

(2) இரு எண்களின் பெருக்கற்பலன் 2016. அவற்றின் மீ. பொ. வ. 12 எனில், அவற்றின் மீ. பொ. ம. யாது ?

(3) இரு எண்களின் பெருக்கற் பலன் 2205. அவற்றின் மீ. பொ. ம. 315 எனில், அவற்றின் மீ. பொ. வ. யாது ?

(4) (i) இரு எண்களின் மீ. பொ. மடங்கிற்கு, அவற்றின் மீ. பொ. வ. ஒரு வகு எண்ணுகும். இது சரியா ?

(ii) பெருக்கற்பலன் 672 கொண்ட இரு எண்களுக்கு 12 மீ. பொ. வ. ஆக இருக்க முடியுமா ?

(5) எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம், d என்பது a, b என்ற இயல் எண்களின் மீ. பொ. வ. எனில்

(i) $d \mid a$, $d \mid b$ என்றும்

(ii) $p \in N$, $p \mid a$, $p \mid b$ எனில், $p \mid d$ என்றும் காட்டுக.

(6) எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் c என்பது a, b என்ற எண்களின் மீ. பொ. ம. எனில்,

(i) $a \mid c$, $b \mid c$ என்றும்

(ii) $m \in N$, $a \mid m$, $b \mid m$ எனில், $c \mid m$ என்றும் காட்டுக.

§6. முதல் 'n' இயல் எண்களின் கூட்டுப்பலன்

ஒன்று முதல் 'n' முடிய உள்ள எல்லா இயல் எண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் கண்டுபிடிக்க உதவும் சூத்திரத்தை முன் வகுப்பிலேயே படித்திருக்கிறீர்களல்லவா ? பல எடுத்துக்காட்டு களின் வாயிலாகவும், ஜியோமிதி அமைப்புச் சீர்களின் மூலமாகவும்

$$1 + 2 + 3 + \dots (n-1) + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

எனக் கற்றிருக்கிறீர்கள். இங்கு இச் சூத்திரத்தின் நிரூபணத்தைப் பார்ப்போம்.

$$1 + 2 + 3 + \dots (n-2) + (n-1) + n = S \text{ என்க.}$$

வரிசை மாற்றுப் பண்பின்படி, வரிசையை மாற்றி

$$n + (n-1) + (n-2) \dots 3 + 2 + 1$$

என எழுதினாலும் கூட்டுத்தொகை S ஆகும்.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots 2 + 1$$

பத்தி பத்தியாகக் கூட்ட

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) \dots$$
$$\dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$
$$= n(n+1)$$

[ஒவ்வோர் உறுப்பும் $(n+1)$ ஆக n உறுப்புகள் உள்ளன.]

$$\therefore \quad S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

67. முதல் *n* ஒற்றை எண்களின் கூட்டுப்பலன்

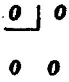
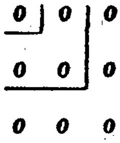
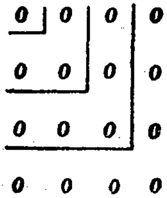
கீழ் வருவதில் உள்ள அமைப்புச் சீரைக் கவனி.

1	$= 1$	$= 1^2$
$1 + 3$	$= 4$	$= 2^2$
$1 + 3 + 5$	$= 9$	$= 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7$	$= 16$	$= 4^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9$	$= 25$	$= 5^2$

ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள ஒற்றை எண்களின் எண்ணிக்கைக்கும், அவற்றின் கூட்டுத் தொகைக்கும் உள்ள தொடர்பினை ஆராய்க.

ஒவ்வொரு வரிசையிலும் எத்தனை எண்ணிக்கை ஒற்றை எண்கள் உள்ளனவோ, அந்த எண்ணிக்கையின் வர்க்கமே, கூட்டுத் தொகையாக அமைவதைப் பார்க்கலாம்.

எனவே, முதல் 'n' ஒற்றை எண்களின் கூட்டுத் தொகை n^2-க்குச் சமம் எனத் தெரிந்து கொள்ளலாம். அடியிற்கண்ட அமைப்புச் சீர்களும் இதனை விளக்கும்.

1		$1 \times 1 = 1^2$
$1 + 3$		$2 \times 2 = 2^2$
$1 + 3 + 5$		$3 \times 3 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7$		$4 \times 4 = 4^2$

பயிற்சி 6·5

(1) கூட்டுக :

(a) $1 + 2 + 3 + \dots + 21$

(b) $1 + 2 + 3 + \dots + 100$

(c) $24 + 25 + \dots + 50$

(d) $69 + 70 + \dots + 98$

(e) $1 + 3 + 5 + \dots + 19$

(f) $1 + 3 + 5 + \dots + 25$

(g) $9 + 11 + 13 + \dots + 21$

(h) $7 + 9 + 11 + \dots + 29$

(2) $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$ என்ற கூற்றை நிரூபிக்க.

(3) (a) $2x - 1 = x^2 - (x-1)^2$ என்று காட்டுக.

(b) இதில் $x = 1, 2, 3, \dots n$ என்றிட்டு. விடைகளை ஒன்றன்கீழ் ஒன்றாக எழுதுக.

$2 \cdot 1 - 1$ அதாவது $1 = 1^2 - 0^2$

$2 \cdot 2 - 1$ அதாவது $3 = 2^2 - 1^2$

(c) இச் சமன்பாடுகளின் இரு புறங்களையும் பத்தி யாகக் கூட்டுக. என்ன கிடைக்கிறது ?

7. கணித வாக்கியங்கள்

§1. மெய்யெண் தளம்

கணம் $A = \{1, 2, 3\}$, கணம் $B = \{a, b, c\}$ என்றால் கார்டீசியன் பெருக்கல் கணம்,

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$$

என்பது உங்களுக்குத் தெரியும்.

இப்பொழுது, A, B என்னும் இரு கணங்களுக்குப் பதிலாக, R என்ற மெய்யெண்களின் கணத்தையே எடுத்துக் கொண்டால்,

$R \times R$ என்பது மெய்யெண்களின் கணத்தின் கார்டீசியன் பெருக்கல் பலன் என்று கூறுகிறோம்.

$$R \times R = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$$

கார்டீசியன் பெருக்கல் பலனிற்கு வரைபடம் அமைத்தல் எவ்விதம் என்று முதல் அத்தியாயத்தில் படித்திருக்கிறீர்கள். இதன்படி $R \times R$-ன் வரைபடம் தளத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் கொண்டதாகும்.

பயிற்சி 7.1

வரைபடத்தின் உதவி கொண்டு, மெய்யெண் தளம் ஒன்றை அமைத்து அதில் கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

(a) $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(-1, +2)$, $(1, -2)$, $(-2, -3)$.

(b) $P(0, 0)$, $Q(1, 2)$, $R(2, 4)$, $S(-2, 4)$, $T(-3, -6)$, $U(\frac{1}{2}, 1)$, $V(-\frac{1}{2}, -1)$

§2. ஒருபடி திறந்த வாக்கியங்கள்

$x + 5 = 6$ என்பது ஒரு திறந்த வாக்கியம். இங்கு, இவ் வாக்கியம் x என்ற ஒரு மாறியில் அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது. x-ற்குப் பிரதியீடு செய்யப்படும் எண் எந்த கணத்தின் உறுப்போ, அக் கணத்தைப் பிரதியீட்டுக் கணம் (Replacement set) என்று கூறுகிறோம்.

இக் கணத்தின் எவ்வுறுப்புகள், மேலே கொடுக்கப்பட்ட திறந்த வாக்கியத்தை மெய் வாக்கியமாக அமைக்கின்றனவோ, அவ்வுறுப்புகளால் ஆன கணம் தீர்வுக் கணம் (Solution set) ஆகும்.

இப்பொழுது இரு மாறிகளாலான, திறந்த வாக்கியங்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$x + y = 5.$$

இங்கு, x, y என்னும் மாறிகளின் பிரதியீட்டுக் கணங்கள் இரண்டுமே. மெய்யெண்களின் கணம் என்றால், $x + y = 5$ என்னும் திறந்த வாக்கியத்தை மூடிய வாக்கியமாக மாற்றி அமைக்க, x-ற்கு மெய்யெண் கணத்தின் ஓர் உறுப்பையும், y-க்கு

மெய்யெண் கணத்தின் ஓர் உறுப்பையும் பிரதியீடாக அமைக்க நமக்குப் பல மூடிய வாக்கியங்கள் கிடைக்கும். இவ்வாறாக, மூடிய வாக்கியங்கள் கிடைக்க, (x, y) என்ற சோடியின் பிரதியீட்டுக் கணத்தை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். (x, y) என்ற சோடியின் பிரதியீட்டுக் கணம் $R \times R$ என்பதாகும். அதாவது $x + y = 5$ என்ற திறந்த வாக்கியத்தை மூடிய வாக்கியமாக அமைக்கும் சோடிகளின் கணம், $R \times R$ என்னும் பெருக்கல் கணமாகும்.

(x, y) சோடியின் பிரதியீட்டுக் கணம், $R \times R$ அல்லாமல்,

$$\{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5)\}$$

என்று கொண்டால்,

$x + y = 5$ என்னும் திறந்த வாக்கியம் (x, y) சோடிகளின், $(2, 3)$, $(3, 2)$ என்ற மதிப்புகளுக்கு மெய்வாக்கியமாக மாறுகிறது. இப்பொழுது $\{(2, 3), (3, 2)\}$ என்ற கணம் மேலே குறிப்பிட்ட திறந்த வாக்கியத்தின் தீர்வுக் கணமாகும்.

(x, y)-ன் பிரதியீட்டுக் கணம் $R \times R$ ஆனால், தீர்வுக் கணம் $\{(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0), (6, -1), (\sqrt{2}, (5 - \sqrt{2})); (5 + \pi, -\pi) \ldots\}$ ஆகும்.

இரு மாறிகளுள்ள திறந்த வாக்கியத்தின் பிரதியீட்டுக் கணங்களின் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு சோடியாக அமையும். இச் சோடியின் உறுப்புகளை மாற்றி எழுதக்கூடாது. ஏனெனில் இச் சோடிகளில் (a, b) என்ற சோடி (b, a) என்ற சோடியினின்றும் மாறுபட்டதாகும்.

இப்பொழுது மூன்று மாறிகளுள்ள திறந்த வாக்கியத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$x + y + z = 6$ என்றும்,

x, y, z என்ற மாறிகளின் பிரதியீட்டுக் கணங்கள் முறையே $X = \{5, 6\}$, $Y = \{0, 4\}$, $Z = \{1, -3, 0\}$ என்றும் கொண்டால்,

(x, y, z)-ன் பிரதியீட்டுக் கணம் $X \times Y \times Z$ ஆகும்.

இது

$$\{(5, 0, 1), (5, 0, -3), (5, 0, 0),$$
$$(5, 4, 1), (5, 4, -3), (5, 4, 0),$$
$$(6, 0, 1), (6, 0, -3), (6, 0, 0),$$
$$(6, 4, 1), (6, 4, -3), (6, 4, 0)\}$$ ஆகும்.

இங்குக் கணத்தின் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் மூன்று எண்களாலானவை என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. இங்கும் எண்களை வரிசை மாற்றி அமைப்பது கூடாது.

இங்குத் தீர்வுக் கணம் $\{(5, 0, 1), (5, 4, -3), (6, 0, 0)\}$. இது பிரதியீட்டுக் கணத்தின் உட்கணமாகும்.

இங்கு x, y, z இவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணம் ஒவ்வொன்றும் R என்று கொண்டால், (x, y, z)-ன் பிரதியீட்டுக் கணம் $R \times R \times R$ அல்லது R^3 ஆகும்.

மேலே கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து சோடி பிரதியீட்டுக் கணம், $R \times R$ என்னும் பெருக்கல் கணத்தின் உட்கணம் என்றும், தீர்வுக் கணம், பிரதியீட்டுக் கணத்தின் உட்கணம் என்றும் தெரிகிறதல்லவா ?

பயிற்சி 7·2

கீழ்க்கண்ட திறந்த வாக்கியங்களின் பிரதியீட்டுக் கணம், தீர்வுக் கணம் இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(1) $x + y = 7$ [x, y இவற்றின் பிதிரயீட்டுக் கணம் முறையே $\{4, 5, 6, 7\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$]

(2) $x - y = 2$ [x, y இவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணம் முறையே $\{0, 1, 2, -3\}$, $\{2, 3, -6\}$]

(3) $2x - y = 1$ [x, y இவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணம், மெய்யெண்களின் கணங்களாகும்.]

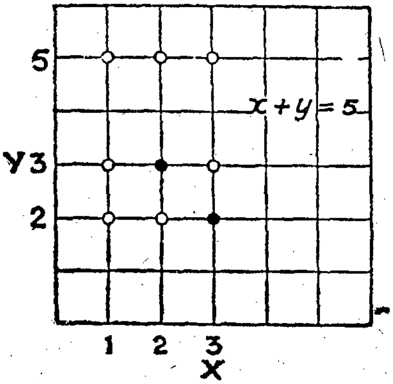
§3. பிரதியீட்டுக் கணம், பெருக்கல் கணம், தீர்வுக் கணம் இவற்றின் வரைபடங்கள் :

எடுத்துக்காட்டு :

$x + y = 5$. இத் திறந்த வாக்கியத்தின் பிரதியீட்டுக் கணம்

$$\{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5)\}$$

என்று கொண்டால், இதன் தீர்வுக் கணம் $\{(2, 3), (3, 2)\}$ ஆகும். இதன் வரைபடம் பின்வருமாறு.



படம் 7-1.

மேலே காட்டிய எடுத்துக்காட்டில், பிரதியீட்டுக் கணம் $R \times R$ எனில், தீர்வுக் கணம்,

$$\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x + y = 5\}$$

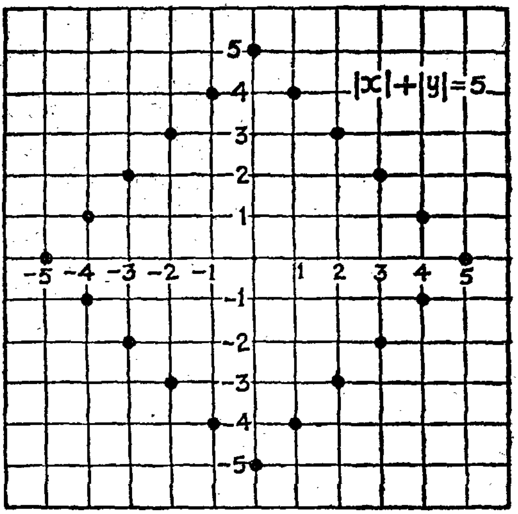
இதன் வரைபடம், (2, 3), (3, 2) என்ற சோடிகளுக்கு இசைந்த புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் கோடு ஆகும்.

இரு மாறிகளின் தனி மதிப்புள்ள, இருபடி திறந்த வாக்கியங்களின் வரைபடங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு :

$|x| + |y| = 5$-ன் வரைபடத்தை வரை.

x, y-ன் பிரதியீட்டுக் கணங்களை Z என்று கொள்.



படம் 7-2.

இங்குத் தீர்வுக் கணம்

$\{(2, 3), (-2, 3), (-2, -3), (2, -3),$
$(0, 5), (0, -5), (5, 0), (-5, 0)$
$(1, 4), (-1, 4), (-1, -4), (+1, -4)\}$

இங்கு எடுத்துக் கொண்டுள்ள புள்ளிகளனைத்தும் ஒரு தூரத்தின் பக்கங்களின் மேல் அமைவது குறிப்பிடத் தக்கது.

பயிற்சி 7·3

வரைபடம் வரைக.

x, y-ன் பிரதியீட்டுக் கணங்கள் Z என்று கொள்க :

(அ) $|x| + |y| = 4$ (ஆ) $|x| - |y| = 0$

(இ) $|x| - 2|y| = 3$

§4. இடைவெளி வரைபடங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$(a < x < b)$

$5 < x < 10$-ன் வரைபடம் வரைக.

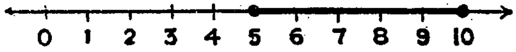
இங்கு ஒரு மெய்யெண் கோடு போதுமானது.

x-ன் பிரதியீட்டுக் கணம் முழுக்களானல், $5 < x < 10$-ன் வரைபடம் 5, 6, 7, 8, 9, 10 என்ற முழுக்களின் பிம்பங்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளாகும்.

பிரதியீட்டுக் கணம் மெய்யெண் கணமானல்,

$5 < x < 10$-ன் வரைபடம், 5, 10 — இம் மெய்யெண்களின் பிம்பங்களை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டாகும். இக் கோட்டுத் துண்டில் 5, 10 இவற்றின் பிம்பமும் அடங்கும்.

இவ்விடைவெளி மூடிய இடைவெளியாகும்.



படம் 7-3.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$a < x < b$ (பாதி மூடிய இடைவெளி)

$-4 < x < 4$-ன் வரைபடத்தை வரை. $x \in \mathbb{R}$ என்று கொள்.

படம் 7-4.

இப்பொழுது $-4 < x < 4$-ன் வரைபடம், மெய்யெண் கோட்டில் -4, $+4$ இவற்றின் பிம்பங்களை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டு. ஆனல் இங்கு 4-ன் பிம்பம், இக் கோட்டுத் துண்டின் புள்ளியாகும். ஆனல் -4-ன் பிம்பம் இக் கோட்டுத் துண்டின் புள்ளியாகாது. அதாவது, -4 நீங்கலாக, -4 முதல்

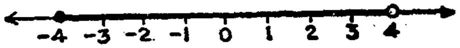
+ 4 வரையிலுமுள்ள எல்லா மெய்யெண்களின் பிம்பமும் இவ் வரைபடத்தில் அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$a \leq x < b$ (பாதி மூடிய இடைவெளி)

$x \in R$ எனில் $-4 \leq x < 4$-ன் வரைபடம் வரைக.

இதுவும் எடுத்துக்காட்டு 2-ல் கூறிய வரைபடத்தைப் போலவே அமையும். ஆனால் இங்கு −4-ன் பிம்பம்,



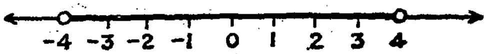
படம் 7-5.

கோட்டுத் துண்டின் புள்ளியாகும். ஆனால், 4-ன் பிம்பம் கோட்டுத்துண்டின் புள்ளியாகாது.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$a < x < b$ (திறந்த இடைவெளி)

$-4 < x < 4$-ன் வரைபடம் வரைக. $(x \in R)$



படம் 7-6.

− 4, 4 என்ற மெய்யெண்களின் பிம்பங்கள் நீங்கலாக − 4, 4-க்கு இடையில் அமையும் மற்றெல்லா மெய்யெண்களின் பிம்பங்களைக் குறிக்கும் கோட்டுத் துண்டு $-4 < x < 4$-ன் வரைபடமாகும்.

பயிற்சி 7·4

கீழே கொடுத்துள்ள இடைவெளிகளின் வரைபடங்களை வரை.

(1) $0 \leq x \leq 3$

(2) $4 < x \leq 8$

(3) $-6 \leq x < 0$

(4) $-2 < x < 2$

8. ஒருபடி சமன்பாடுகளும், சமனிலிகளும்

§1. இரு மாறிகளின் ஒருபடி திறந்த வாக்கியங்களின் சோடி

$x+y=4$, $x-y=2$ என்ற இரு திறந்த வாக்கிய சோடியை எடுத்துக்கொள்.

இவ்விரண்டு தனித்தனி வாக்கியங்களைக்கொண்டு, 'அல்லது' 'மேலும்' என்ற சொற்களிலொன்றைக்கொண்டு, இரு புதிய திறந்த வாக்கியங்களை அமைக்கலாம்.

முதலில் 'அல்லது' வாக்கியங்களை ஆராய்வோம்.

"$x+y=4$ அல்லது $x-y=2$" என்பது ஒரு திறந்த வாக்கியம்.

x, y இவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணம் முறையே

$X=\{1, 2, 3, 4\}$

$Y=\{1, 2, 3\}$ என்றால்,

(x, y)-ன் பிரதியீட்டுக் கணம்

$$=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$ ஆகும்.

$x+y=4$ என்ற திறந்த வாக்கியத்தின் தீர்வுக் கணம் $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ ஆகும்.

$x-y=2$ என்ற திறந்த வாக்கியத்தின் தீர்வுக் கணம் $\{(4, 2), (3, 1)\}$ ஆகும்.

இப்பொழுது $x+y=4$ அல்லது $x-y=2$ என்பதன் தீர்வுக் கணம், $x+y=4$, $x-y=2$, இத் திறந்த வாக்கியங்களின் தீர்வுக் கணங்களின் கூட்டுக் கணமாகும்.

ஏனெனில் $x+y=4$ அல்லது $x-y=2$ என்பதில் x, y-ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு ஒன்றோ அல்லது இரண்டுமேயோ மெய்யாக இருந்தால் அம் மதிப்புகளை உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணம், தீர்வுக் கணமாகுமன்றோ ?

ஆகவே இங்கு, கணம் $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 2)\}$ என்பது தீர்வுக் கணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

தீர் : $2x + y = 8$ அல்லது $x - y = 4$

x, y இவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணம்

$X = \{0, 1, 2, 3, -1, -2\}$

$Y = \{0, -2, +2, -3, +3, \pm 4\}$ என்று கொள்.

$2x + y = 8$-ன் தீர்வுக் கணம் $\{(3, 2), (2, 4)\}$

$x - y = 4$-ன் தீர்வுக் கணம்

$\{(2, -2), (1, -3), (0, -4)\}$

ஆகவே, $(2x + y) = 8$ அல்லது $(x - y) = 4$-ன் தீர்வுக் கணம் $\{(3, 2), (2, 4), (2, -2), (1, -3), (0, -4)\}$ ஆகும்.

பயிற்சி 8·1

(1) "$x + y = 5$ அல்லது $x - y = 3$" என்ற திறந்த வாக்கியத்தின் தீர்வுக் கணத்தைக் கண்டுபிடி.

x, y இவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணங்கள் முறையே

$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

$Y = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3)\}$.

(2) "$x + 2y = 4$ அல்லது $x - y = 3$" என்ற திறந்த வாக்கியத்தின் தீர்வுக் கணத்தைக் கண்டுபிடி. x, y இவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணங்கள் முறையே

$X = \{0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2\}$,

$Y = \{1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\}$.

(3) "$x - y = 3$ அல்லது $x - y = -2$" இந்தத் திறந்த வாக்கியத்தின் தீர்வுக் கணத்தைக் கண்டுபிடி.

x, y இவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணங்கள் முறையே

$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$Y = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$

§2. இப்பொழுது இருமாறிகளின் இரண்டு திறந்த வாக்கியங்களை "மேலும்" முறையில் சேர்த்து எழுதி தீர்வுக் கணத்தைக் காண்போமாக. இத்தகையவை ஒருங்கமை வாக்கியங்கள் எனப் படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

"$x + y = 5$; மேலும் $x - y = 1$" என்ற திறந்த வாக்கியத்தைக் கவனிக்க.

x, y இவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணம் முறையே

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$Y = \{0, \pm 1, \pm 2, 3\} \text{ என்க.}$$

$x + y = 5$ என்ற திறந்த வாக்கியத்தின் தீர்வுக் கணம்

$$\{(2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0), (6, -1), (7, -2)\}.$$

$x - y = 1$ என்ற திறந்த வாக்கியத்தின் தீர்வுக் கணம்

$$\{(0, -1), (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

இப்பொழுது $x + y = 5$-ம் $x - y = 1$-ம் இரண்டுமே மெய்யான வாக்கியங்களாக அமைய வேண்டுமாயின், தீர்வுக் கணம், $x + y = 5$, $x - y = 1$ இவற்றின் தீர்வுக் கணங்களின் வெட்டுக் கணமாக அமைய வேண்டும்.

ஆகவே, $x + y = 5$-ம் $x - y = 1$-ம் ஆகவுள்ள திறந்த வாக்கியத்தின் தீர்வுக் கணம் $\{(3, 2)\}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x + y = 4$-ம், $x + y = 7$-ம் ஆன திறந்த வாக்கியத்தைக் கவனிக்க.

x, y இவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணம் முறையே

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, \quad Y = \{1, 3, 4, 5, 6\} \text{ என்க.}$$

$x + y = 4$-ன் தீர்வுக் கணம் $\{(1, 3), (3, 1)\}$

$x + y = 7$-ன் தீர்வுக் கணம்

$$= \{(3, 4), (4, 3), (2, 5), (1, 6)\}$$

இங்கு $x + y = 4$-ம், $x + y = 7$-ம் ஆன திறந்த வாக்கியத்தின் தீர்வுக் கணம் ϕ ஆகும்.

பயிற்சி 8·2

(1) பின் கண்ட ஒருபடி சோடி வாக்கியங்கள் இரண்டுமே மெய்யாக வேண்டுமென்றால், அவற்றின் தீர்வுக் கணத்தைக் கண்டுபிடி. X, Y என்பவை x, y ஆகியவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணங்கள்.

(1) $x + y = 5, \ x + 2y = 7$ $\quad X = \{1, 3, 5, 7\}$

$Y = \{2, 4, 6\}$

(2) $2x + y = 7, \ x - y = 5$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

(3) $3x + y = 4, \ x - y = 4$

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$Y = \{1, 2, 3\}$

§ 3. சமான, கூட்டுவாக்கிய சோடிகள்

பின்வரும் திறந்த வாக்கிய சோடிகளைப் படித்துப் பார்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$x + y = 2, \quad 2x + 2y = 4$$

சோடியின் இரண்டாவது திறந்த வாக்கியத்தை எடுத்துக் கொண்டால், $2x + 2y = 4$ என்பதை $2(x + y) = 4$ என்று பங்கீட்டுப் பண்பை உபயோகித்து எழுதலாமல்லவா ?

இப்பொழுது இருபுறத்தையும் $\frac{1}{2}$ ஆல் பெருக்க முதல் திறந்த வாக்கியம் கிடைக்கிறது.

இவ்வாறு அமையும் சோடி வாக்கியங்கள், சமான கூட்டு வாக்கிய சோடிகள் எனப்படும் (Equivalent pairs of compound sentences).

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$(x - y = 4), \ (3x - 3y = 12)$ இவை சமான கூட்டு வாக்கிய சோடிகள்.

இதேபோல் (i) $2x - y = 8,\ -4x + 2y = -10$

(ii) $x + 2y = 6,\ 8x + 16y = 48$

இவைகளும் சமான கூட்டு-வாக்கிய சோடிகளாகும்.

பயிற்சி 8·3

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வாக்கிய சோடிகள், சமான கூட்டு வாக்கிய சோடிகளா என்று கண்டுபிடி.

(1)	$x + y = 8$	$-x - y = -8$
(2)	$2x + 3y = 5$	$50x + 75y = 125$
(3)	$x + 4y = \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}x - 2y = -4$
(4)	$x - 3y = 9$	$3x - y = \frac{1}{3}$
(5)	$2x + 4y = 8$	$-x - 2y = 4$

§4. சமான கூட்டு வாக்கிய சோடிகளின் வரைபடங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x + y = 2,\quad 2x + 2y = 4$—இவற்றின் வரைபடங்களை வரைக.

$x + y = 2$ என்ற திறந்த வாக்கியத்தின் வரைபடம் வரைவதெப்படி என்று முன்பாடத்தில் பார்த்தோம். (பிரதியீட்டுக் கணம் முழுக்களானால், வரைபடங்கள் தனித்த புள்ளிகளாக அமைவது நினைவிருக்கலாம்.) பிரதியீட்டுக் கணம் மெய்யெண்களின் கணமானால், வரைபடம் முன்பு வரைபடத்தில் அமைந்த புள்ளிகள் நிர்ணயிக்கும் கோடாகும்.

ஆகவே, அட்டவணை மூலம், $x + y = 2$-ன் தீர்வுக் கணத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

இப்பொழுது சுலபமாகத் தீர்வுக் கணத்தின் ஏதேனும் மூன்று உறுப்புகள் நமக்குக் கிடைக்கும்.

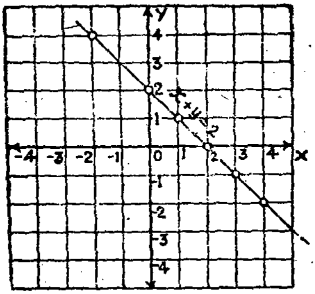
அவை $(1,\ 1),\ (0,\ 2),\ (2,\ 0)$ ஆகும்.

$x + y = 2$

x	1	0	2
y	1	2	0

ஏதேனும் இரு புள்ளிகள் ஒரு கோட்டை நிர்ணயிக்குமாதலால், மேலே கூறியுள்ள புள்ளிகளை $R \times R$ தளத்தில்

அமைத்து (மூன்று புள்ளிகள் ஏன்?) அப் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் கோட்டை வரை. $x + y = 2$-ன் வரைபடம் கிடைக்கும்.



படம் 8-1 (a).

இதேபோல் $2x + 2y = 4$-ன் வரைபடத்திற்குத் தீர்வுக் கணத்தின் ஏதேனும் மூன்று உறுப்புகளை (மூன்றாவது உறுப்பு, முதலில் குறித்த இரு புள்ளிகளைச் சரி பார்க்க) எடுத்துக் கொண்டு அவற்றின் பிம்பங்களை அதே மெய்யெண் தளத்தில் குறிக்கவும்.

$2x + 2y = 4$

x	4	3	-2
y	-2	-1	4

இப் புள்ளிகள் யாவும், முதலில் வரையப்பட்ட ($x + y = 4$-ன்) வரைபடத்தின் கோட்டிலேயே அமைகிறது.

ஆகவே, வரைபடம் மூலமாகவும் கொடுக்கப்பட்ட இரு திறந்த வாக்கியங்கள் சமானமானவைகளா என்று கண்டு பிடிக்கலாம்.

அதாவது, இரு வரை படங்களும் ஒன்றின் மீது ஒன்றாகப் பொருந்தி அமையுமானால், எடுத்துக் கொண்ட திறந்த வாக்கியங்கள் சமான வாக்கியங்களாகும்.

பயிற்சி 8·4

முந்தைய பயிற்சியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள திறந்த வாக்கியங்களின் வரைபடங்களை வரைந்து அவை சமான வாக்கியங்களா என்று பார்.

§ 5. ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

சமன்பாடுகளைத் தீர் :

$2x + 3y = 8$ ... ... (1)

மேலும், $3x + 4y = 11$ ... ... (2)

(1) ஐ 4 ஆலும்,

(2) ஐ 3 ஆலும் பெருக்க :

$$8x + 12y = 32 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$9x + 12y = 33 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4).$$

(3)-லிருந்து (4) ஐக் கழிக்க :

$$-x = -1$$

$$\therefore \quad x = 1.$$

இம் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட

$$2 \times 1 + 3y = 8$$

$$3y = 8 - 2$$

$$3y = 6$$

$$y = 2$$

எனவே தீர்வு (1, 2).

தீர்வுக் கணம் $\{(1, 2)\}$.

பொதுவில்,

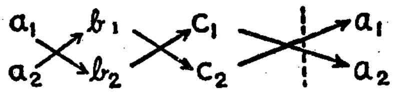
$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad \text{மேலும்,}$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

என்ற சோடி சமன்பாடுகளை மேலே விவரித்த முறையில் தீர்த்து, தீர்வுக்கணம்

$$\left\{\left(\frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\right)\right\}$$

என்று காட்டலாம். இங்குள்ள, $b_1 c_2 - b_2 c_1$, $c_1 a_2 - c_2 a_1$, $a_1 b_2 - a_2 b_1$ என்ற கோவைகள்,



படம் 8-1 (b).

என்ற அமைப்பில் 'குறுக்குப் பெருக்கல்' விதி மூலம் கிடைப்பதைக் காண்க.

பயிற்சி 8·5

பின்வரும் சோடி சமன்பாடுகளைத் தீர் :

(1) $2x + y = 15$, $x + y = 11$

(2) $x - 2y = 2$, $2x + y = 16$

(3) $3x + 5y = 8$, $4x + 7y = 11$

(4) $6x - 7y = 13$, $4x + 3y = 1$

(5) $15x + y = 20$, $5x + 3y = 20$

(6) $7x + 8y = 30$, $8x + 7y = 30$

(7) $10x - 9y = 18$, $9x - 10y = 29$

(8) $\frac{1}{5}x - \frac{1}{4}y = 1$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}y = 2$

§6. ஒரு மாறியில் ஒருபடி சமன்பாடுகள் மூலம் தீர்க்கக் கூடிய சில கணக்குகள் :

எடுத்துக்காட்டு 1 :

கமலா, விமலா இவர்களின் தற்போதைய வயது 3:2 என்ற விகிதத்திலுள்ளது. 5 ஆண்டுகளுக்கு முன் இவர்களுடைய வயதுகளின் விகிதம் 2 : 1 என்றால், இவர்களின் தற்போதைய வயது என்ன ?

	கமலா	விமலா
தற்போதைய வயது	$3x$ ஆண்டுகள்	$2x$ ஆண்டுகள்
5 ஆண்டுகளுக்கு முந்தைய வயது	$3x - 5$	$2x - 5$

5 ஆண்டுகளுக்கு முன் அவர்களின் வயதின் விகிதம் $\} (3x - 5) : (2x - 5)$

$= 2 : 1.$

$\therefore \quad 1(3x - 5) = 2(2x - 5)$

அதாவது $3x - 5 = 4x - 10$

$\therefore \quad 3x - 4x = -10 + 5$

அதாவது $-x = -5$

$x = 5.$

ஆகவே கமலா, விமலா இவர்களின் தற்போதைய வயது 3×5, 2×5.

அதாவது 15 ஆண்டுகள், 10 ஆண்டுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

இரண்டிலக்க எண் ஒன்றின் ஒன்றுஸ்தானம் 7. அந்த எண்ணுடன் 27 ஐக் கூட்ட எண்ணின் இலக்கம் மாறுகிறது. எண்ணைக் கண்டுபிடி.

	பத்து ஸ்தானம்	ஒன்று ஸ்தானம்	எண்ணின் மதிப்பு
எடுத்துக் கொண்ட எண்	x	7	$10x + 7$
இலக்கம் மாறிய எண்	7	x	$7 \times 10 + x$

அதாவது $70 + x = 10x + 7 + 27$

$\therefore\ 70 + x = 10x + 7 + 27$

அல்லது $70 + x = 10x + 34$

அதாவது $-9x = -70 + 34$

$-9x = -36$

$\therefore\ x = 4.$

$\therefore$ எடுத்துக் கொண்ட எண் : **47.**

பயிற்சி 8·6

(1) மலர்விழி, அருள்மொழியை விட 4 வயது சிறியவள். 5 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவர்களின் வயதின் விகிதம் 3:4 என்றால், அவர்களின் தற்போதைய வயது என்ன ?

(2) கண்ணனின் வயது, செழியனின் வயதைப் போல இரு மடங்கு. 4 வருடங்களுக்கு முன் கண்ணனின் வயது செழியனின் வயதைப் போல மூன்று மடங்கு. இப்போது அவர்களின் வயது என்ன ?

(3) கனிமொழி, அவள் தங்கை நங்கை இவர்களின் வயது 10, 8. எத்தனை ஆண்டுகளுக்கு முன் அவர்களின் வயதின் விகிதம் 3 : 2 ஆக இருந்திருக்கும் ?

(4) இரண்டிலக்க எண் ஒன்றில், பத்து ஸ்தானம் 6. எண்ணிலிருந்து 18 ஐக் கழிக்க, இலக்கம் மாறிய எண் கிடைக்குமெனில், முதலில் எடுத்துக் கொண்ட எண் என்ன ?

(5) இரண்டிலக்க எண்ணின், இலக்கங்களின் கூடுதல் 6, எண்ணுடன் 36 ஐக் கூட்ட இலக்கம் மாறிய எண் கிடைக்கும். எண்ணைக் கண்டுபிடி.

(6) இரண்டிலக்க எண்ணொன்றில் பத்து ஸ்தானம் ஒன்று ஸ்தானத்தை விட 4 குறைவு. இலக்கங்களை மாற்றி எழுதுவதால் கிடைக்கும் எண், எடுத்துக் கொண்ட எண்ணின் இருமடங்கைவிட 1 குறைவு. எண் என்ன ?

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒரு பையில் மொத்தம் 30 நாணயங்கள் இருக்கின்றன. இவற்றில் சில 25 பைசா நாணயங்கள். மற்றவை 20 பைசா நாணயங்கள். நாணயங்களின் மொத்த மதிப்பு ரூ. 7·00 என்றால் பையிலுள்ள நாணயங்களின் ஒவ்வொன்றின் எண்ணிக்கையையும் கண்டுபிடி.

25 பைசா நாணயங்களின் எண்ணிக்கை 'x' எனக் கொள்.

20 பைசா நாணயங்களின் எண்ணிக்கை $(30 - x)$ ஆகும்.

25 பைசா நாணயங்ளின் மொத்த மதிப்பு $= \frac{1}{4} \times x$ ரூ.

20 பைசா நாணயங்களின் மொத்த மதிப்பு

$$= \text{ரூ} \left[\frac{1}{5} \times (30 - x)\right]$$

எல்லா நாணயங்களின் மொத்த மதிப்பு

$$= \text{ரூ} \left[\frac{1}{4} x + \frac{1}{5} (30 - x)\right]$$

$$\frac{1}{4} x + \frac{1}{5} (30 - x) = 7$$

$$\frac{1}{4} x + 6 - \frac{1}{5} x = 7$$

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{5}x = 7 - 6$$

$$\frac{x}{20} = 1$$

$$\therefore \quad x = 20.$$

25 பைசா நாணயங்களின் எண்ணிக்கை 20

20 பைசா நாணயங்களின் எண்ணிக்கை (30 − 20) = 10.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஓர் அறையில் சில நாற்காலிகள் போடப்பட்டுள்ளன. வரிசைக்கு 5 நாற்காலிகள் வீதம் போடும்போது, ஒரு வரிசைக்கு நாற்காலிகள் இல்லை. ஒரு வரிசைக்கு 4 நாற்காலிகள் வீதம் போட்டால், மூன்று நாற்காலிகள் மீதமாகின்றன. அவ்வறையில் எத்தனை வரிசை நாற்காலிகள் போடத் தீர்மானிக்கப்பட்டுள்ளது? மொத்தமுள்ள நாற்காலிகள் எவ்வளவு ?

நாற்காலிகள் போட வேண்டிய மொத்த வரிசைகள் x எனக் கொள்

ஒரு வரிசைக்குப் போடப்படும் நாற்காலிகள் 5

வரிசைக்கு 5 நாற்காலிகள் வீதம் போடப்படும் வரிசைகள் $= x - 1$

ஆகவே, மொத்த நாற்காலிகளின் எண்ணிக்கை $= 5 \times (x - 1)$

ஒரு வரிசைக்கு 4 நாற்காலிகள் வீதம் போடும்போது நாற்காலி போடப் படும் வரிசைகளின் எண்ணிக்கை x.

ஆகவே, இவ்வரிசைகளிலுள்ள நாற்காலிகளின் எண்ணிக்கை $= 4x$

மீதமுள்ள நாற்காலிகள் $= 3$

$\therefore$ மொத்த நாற்காலிகள் $4x + 3$

$$\therefore \quad 5(x - 1) = 4x + 3$$

$$5x - 5 = 4x + 3.$$

$$\therefore \quad 5x - 4x = 3 + 5$$

$$x = 8$$

அதாவது நாற்காலி போட வேண்டிய மொத்த வரிசைகள் } $= 8$

மொத்த நாற்காலிகளின் எண்ணிக்கை $= 5(x-1)$

$= 5(8-1)$

$= 5 \times 7 = 35.$

பயிற்சி 8·7

(1) ஒரு பையில் 10 பைசா நாணயங்களும், 20 பைசா நாணயங்களுமாக மொத்தம் 25 நாணயங்கள் உள்ளன. இந் நாணயங்களின் மொத்த மதிப்பு ரூ. 3·50 என்றால் பையிலுள்ள 10 பைசா நாணயங்கள் எவ்வளவு? 20 பைசா நாணயங்கள் எவ்வளவு?

(2) ஒரு பையில் 10 பைசா, 20 பைசா, 25 பைசா நாணயங்கள் உள்ளன. இவை ஒவ்வொன்றின் எண்ணிக்கையும் 2:3:2 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. இவற்றின் மொத்த மதிப்பு ரூ. 3·90 என்றால் பையிலுள்ள நாணயங்கள் ஒவ்வொன்றின் எண்ணிக்கையையும் கண்டுபிடி.

(3) ஒருவன் சிறியதும் பெரியதுமான சில எலுமிச்சம் பழங்களைச் சிறியவை ஒவ்வொன்றும் 5 பைசா வீதமும், பெரியவை ஒவ்வொன்றும் 8 பைசா வீதமுமாக மொத்தம் 130 பழங்களை ரூ. 8·00-க்கு வாங்கினான். அவன் 5 பைசா வீதம் வாங்கிய பழங்கள் எத்தனை? 8 பைசா வீதம் வாங்கிய பழங்கள் எத்தனை?

(4) ஒரு வகுப்பறையில் சில பெஞ்சுகள் வரிசையாகப் போடப்பட்டுள்ளன. ஒரு பெஞ்சுக்கு 5 மாணவர்கள் வீதம் உட்கார்ந்தால், 1 பெஞ்சு காலியாக இருக்கும். 1 பெஞ்சுக்கு 4 மாணவர்கள் வீதம் உட்கார்ந்தால், 5 மாணவர்களுக்கு இடம் இருக்காது. அவ்வகுப்பறையிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

(5) செவ்வகமான ஒரு வயலின் நீள அகலங்கள் 3:2 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. நீளத்தில் 5 மீட்டரைக் குறைத்து அகலத்தில்

6 மீட்டரை அதிகப்படுத்த அவ்வயல் சதுர வடிவமாக மாறும். அவ்வயலின் நீள அகலங்களைக் கண்டுபிடி.

(6) சுற்றுலாவிற்கு ஏற்பாடு செய்யப்பட்டுள்ள ஒரு வகுப்பில் ஒவ்வொருவரும் மொத்தச் செலவைச் சமமாகப் பங்கிட்டுக் கொள்ள தலைக்கு ரூ. 4·50 கொடுக்க வேண்டி வருகிறது. இவர்களுள் 4 பேர் சுற்றுலாவில் கலந்து கொள்ளாத தால், சுற்றுலாவில் கலந்து கொண்ட ஒவ்வொருவரும் 50 பைசா அதிகம் கொடுக்க வேண்டி வந்தது. சுற்றுலாவில் கலந்து கொண்டவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

எடுத்துக்காட்டு 3.

ஒரு கைக்கடிகாரமும், ஒரு சுவர்க் கடிகாரமும் சேர்ந்து ரூ. 390-க்கு வாங்கும் ஒரு வியாபாரி, அவற்றை விற்று கைக் கடிகாரத்தில் 10% இலாபமும் சுவர்க் கடிகாரத்தில் 15% இலாபமும் அடைகிறார். அவர் அடைந்த மொத்த இலாபம் ரூ. 51·50 என்றால், கைக்கடிகாரம், சுவர்க்கடிகாரம் இவற்றை அவர் ஒவ்வொன்றும் என்ன விலைக்கு வாங்கினார்?

கைக் கடிகாரத்தின் விலை ரூ. x என்று கொள்.

சுவர்க்கடிகாரத்தின் விலை ரூ. y என்று கொள்.

இவற்றின் மொத்த விலை $x + y = 390$ ... ... (1)

கைக் கடிகாரத்தில் கிடைக்கும் இலாபம் $= \frac{10}{100} x$ ரூ.

சுவர்க் கடிகாரத்தில் கிடைக்கும் இலாபம் $= \frac{15}{100} y$ ரூ.

மொத்த இலாபம் $= \frac{10x}{100} + \frac{15y}{100} = 51{\cdot}50$

$$10x + 15y = 5150$$

$$2x + 3y = 1030 \quad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடு 1 × 2

அதாவது, $x + y = 390 \implies 2x + 2y = 780$ ... (3)

சமன்பாடு (2) — சமன்பாடு (3) $y = 250.$

$x + y = 390$-ல் y-ன் மதிப்பைப் பிரதியிட

$$x = 140.$$

∴ கைக் கடிகாரம் விலை ரூ. 140.

சுவர்க்கடிகாரம் விலை ரூ. 250.

பயிற்சி 8·8

(1) 5 போட்டோ ஆல்பம், 7 சுருள் பிலிம் இவற்றின் மொத்த விலை ரூ 43. 4 போட்டோ ஆல்பம், 8 சுருள் பிலிம் இவற்றின் மொத்த விலை ரூ. 44. 1 போட்டோ ஆல்பம். 1 சுருள் பிலிம் இவற்றின் விலையைக் கண்டிபிடி.

(2) ஒரு விருந்திற்கு 2 பூசணிக்காய்களும் 8 பரங்கிக் காய்களும் வாங்குவதற்கு ரூ. 8.75 செலவிடப்பட்டது. அதே அளவும் விலையும் கொண்ட இன்னும் 2 பூசணிக்காய்களும் 2 பரங்கிக்காய்களும் மறுபடியும் வாங்கப்பட்டன. இப்பொழுது ரூ. 4·25 செலவழிக்கப்பட்டதென்றால், 1 பூசணி, 1 பரங்கிக் காய் இவற்றின் விலையைக் கண்டுபிடி.

(3) ஓர் அன்பளிப்பிற்காக வாங்கப்பட்ட ஒரு புத்தகமும் ஒரு பேனாவும் சேர்ந்து ரூ. 32. புத்தகத்தின் விலை பேனாவின் விலையைவிட ரூ. 8 குறைவு என்றால் பேனா, புத்தகம் இவை ஒவ்வொன்றின் விலையையும் தனித்தனியாகக் கண்டுபிடி.

(4) நேற்று 5 கிலோ கத்தரிக்காயும் 3 கிலோ கொத்தவரைக் காயும் சேர்ந்து விலை ரூ. 8·65 ஆயிற்று. இன்று கத்தரிக்காயின் விலை கிலோவிற்கு 5 பைசா அதிகரித்தும், கொத்தவரையின் விலை கிலோவிற்கு 5 பைசா குறைந்தும் விற்கிறது. இன்று 4 கிலோ கத்தரிக்காயும் 5 கிலோ கொத்தவரைக்காயும் வாங்கினால் ரூ. 8·95 கொடுக்க வேண்டும். 1 கிலோ கத்தரிக்காய், 1 கிலோ கொத்தவரை இவற்றின் நேற்றைய விலை, இன்றைய விலை இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(5) சிந்தாமணி சிறப்பங்காடியில் 5 கிலோ நல்லெண்ணெயும் 7 கிலோ கடலெண்ணெயும் சேர்ந்து ரூபாய் 89-க்கு வாங்கும், சில்லறைக் கடைக்காரர், ந. எண்ணெயைக் கிலோவிற்கு 40 பைசா அதிகமாகவும், க. எண்ணெயைக் கிலோவிற்கு 30 பைசா அதிகமாகவும் வைத்து 4 கிலோ ந. எண்ணெய் 5 கிலோ க. எண்ணெய் இவற்றின் மொத்த விற்றவிலை ரூ. 70·10 என்று கணக்கிடுகிறார். சிந்தாமணி சிறப்பங்காடியில் ஒரு கிலோ ந. எண்ணெய் ஒரு கிலோ க. எண்ணெய் இவற்றின் விலை என்ன ?

பயிற்சி 8·9

(1) இரண்டு இலக்க எண் ஒன்றின் மதிப்பு, அவ்விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையின் இரண்டு மடங்கை விட 1 அதிகம். இலக்கங்களை மாற்றுவதால் கிடைக்கும் எண், முதல் எண்ணை விட 54 அதிகம். அவ்வெண் யாது ?

(2) இரண்டு இலக்க எண் ஒன்றின் மதிப்பு அவ் விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையின் 4 மடங்கைவிட 6 குறைவு. இலக்கங்களை மாற்றி எழுதினுல் கிடைக்கும் எண், முதல் எண்ணின் இரு மடங்கை விட 10 அதிகம். அவ் வெண்ணைக் கண்டுபிடி.

(3) மூன்று இலக்க எண் ஒன்றின் பத்து ஸ்தானம் 6, மேலும் இது ஒன்று ஸ்தான இலக்கம், நூறு ஸ்தான இலக்கம் இவற்றின் கூடுதலாகும். ஒன்று ஸ்தான இலக்கத்தையும் நூறு ஸ்தான இலக்கத்தையும் மாற்றி எழுதினுல் கிடைக்கும் எண் முதல் எண்ணைவிட 198 குறைவு. எண் என்ன ?

(4) ஒரு பின்னத்தின் தொகுதியுடன் 2 ஐயும், பகுதியுடன் 1 ஐயும் கூட்ட, பின்னத்தின் மதிப்பு $\frac{3}{5}$ ஆகிறது. தொகுதி பகுதிகளினின்றும் 1 ஐக் கழிக்க பின்னத்தின் மதிப்பு $\frac{1}{2}$ ஆகிறது. முதலில் எடுத்துக்கொண்ட பின்னம் யாது ?

(5) ஒரு பின்னத்தின் தொகுதியுடன் 3 ஐயும், பகுதியுடன் 7 ஐயும் கூட்ட பின்னத்தின் மதிப்பு $\frac{1}{2}$ ஆகிறது. தொகுதியிலிருந்து 2 ஐக் கூட்டிப் பகுதியிலிருந்து 1 ஐக் கழிக்கப் பின்னத்தின் மதிப்பு 1 ஆகிறது. முதலில் எடுத்துக் கொண்ட பின்னம் யாது ?

(6) ஒரு வியாபாரி, ஒரு நாற்காலி மேசை இவற்றை மொத்தமாக ரூ. 70-க்கு வாங்கி, நாற்காலியில் 20% இலாபமும், மேசையில் 10% இலாபமும் வைத்து விற்பதில் அவருக்கு மொத்தமாக ரூ. 11 இலாபம் கிடைக்கிறது. நாற்காலி, மேசை இவற்றின் வாங்கிய விலையைக் கண்டுபிடி.

(7) ஒரு தரகர், ஒரு வீட்டையும், அதன் புறத்தேயுள்ள தோட்டத்தையும் ரூ. 40,000-க்கு வாங்கி வீட்டை 30% இலாபத்திலும், தோட்டத்தை 20% இலாபத்திலும் விற்பதால் மொத்தமாக ரூ. 11,500 இலாபமடைகிறுர். வீடு, தோட்டம் இவற்றின் வாங்கிய விலை என்ன ?

(8) ஒரு வியாபாரி இரண்டு தையல இயந்திரங்களை மொத்தமாக ரூ. 760-க்கு வாங்கி அதிக விலையுள்ளதை 15% இலாபத்திலும் மற்றதை 5% இலாபத்திலும் விற்று மொத்தத்தில் $11\frac{1}{19}$% இலாபமடைகிறார். தையல் இயந்திரங்கள் ஒவ்வொன்றையும் வாங்கிய விலை என்ன ?

(9) ஒரு வியாபாரி இரு வானொலிப் பெட்டிகளில ஒன்றை 10% இலாபத்திற்கும், மற்றதை 15% இலாபத்திலும் விற்று மொத்தத்தில் ரூ. 140 இலாபமடைய நினைக்கிறார். ஆனால் அவர் முன்னதை 15% இலாபத்திற்கும், மற்றதை 10% இலாபத்திற்கும், விற்க நேர்ந்ததில் முன்பு நினைத்ததை விட ரூ. 5 குறைவாகப் பெறுகிறார். வானொலிப் பெட்டி ஒவ்வொன்றையும் என்ன விலைக்கு வாங்கினார் ?

(10) ஒரு வியாபாரி இரு சைக்கிள்களில் ஒன்றை 20% இலாபத்திற்கும், மற்றதை 10% இலாபத்திற்கும் விற்று ரூ. 125 இலாபமடைய நினைக்கிறார். ஆனால் முன்னதை 25% இலாபத்திற்கும், பின்னத்தை 5% நட்டத்திற்கும் விற்க நேரிடுவதால் முன்பு நினைத்ததை விட ரூ. 47·50 குறைவாகப் பெறுகிறார். ஒவ்வொரு சைக்கிளின் வாங்கிய விலையையும் கண்டுபிடி.

§6. 2 மாறியின் ஒருபடி அசமன்பாடுகள்

எடுத்துக்காட்டு :

$x + y < 5$ என்று கொண்டால், இதன் தீர்வுக் கணத்தின் பொருள், " x, y என்றும் மாறிகளுக்கு, அவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணங்களின் குறிப்பிட்ட உறுப்புகளை பிரதியிடு செய்யக் கிடைக்கும் (x, y)-ன் கூட்டல் பலன் 5 ஐ விடக் குறைவாகவோ அல்லது 5-க்குச் சமமாகவோ இருக்கும் " என்பதே.

இப்பொழுது, x, y என்பனவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணம்

$A = \{1, 2, 3\}$ எனில்,

$$\{(1, 3), (1, 2), (1, 1), (2, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$$

என்னும் கணம், $x + y < 5$ என்ற அசமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணமாகும். - இக் கணம் $A \times A$-ன் உபகணமாகும்.

பயிற்சி 8·10

அட்டவணைப் படுத்தியோ அல்லது வேறு விதமாகவோ கீழ்க் கண்ட அசமன்பாடுகளின் தீர்வுக்கணத்தைக் கண்டுபிடி. X, Y என்பவை முறையே x, y இவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணங்கள்.

(1) $x + y < 2$: $X = \{1, 2, 3\}$,
$Y = \{-1, 0, 1, 2\}$

(2) $x - y < 3$: $X = \{1, 2\}$,
$Y = \{-1, -2, -3, 1\}$

(3) $2x + y < 0$: $X = \{1, 2, 3\}$,
$Y = \{-1, -2, 0, 1\}$

(4) $x + 2y < -2$: $X = \{1, 2\}$,
$Y = \{-1, 0, 1\}$

இப்பொழுது இந்த அசமன்பாடுகளின் வரைபடத்தை வரையும் முறை என்னவென்று பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x + y > 0$ என்பதன் வரைபடத்தை வரைக.

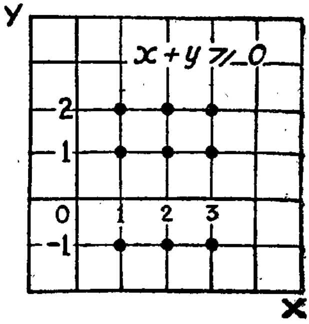
$X = \{1, 2, 3\}$

$Y = \{-1, 1, 2\}$

என்றால்,

$\{(1, -1), (2, -1), (3, -1),$
$(1, 1), (2, 1), (3, 1),$
$(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

என்பதே $x + y > 0$ வின் தீர்வுக் கணமாகும். இப் புள்ளிகளை $R \times R$ தளத்தில் குறித்துக் காட்டியிருக்கிறது.

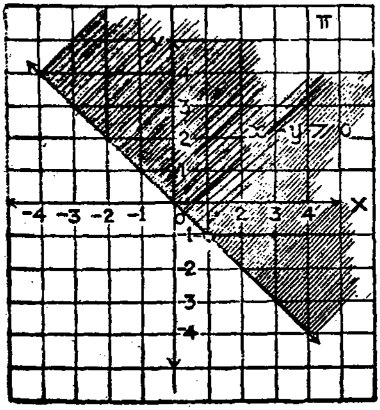


படம் 8-2.

பிரதியீட்டுக் கணங்கள் X, Y இரண்டும் மெய்யெண்களின் கணமானால் $x + y > 0$-ன் வரைபடம் எவ்வாறிருக்கும் என்பதைப் பார்ப்போம்.

$$x + y > 0 \implies y > -x.$$

இப்பொழுது x-ன் மதிப்பு ஏதேனுமொரு மெய்யெண்ணானுல் y-ன் மதிப்பு, அவ் வெண்ணின் கூட்டல்தலைகீழி. உகந்த (x, y) என்னும் சோடிகளைக் கண்டு அவற்றை $R \times R$ தளத்தில் அமைக்க, $x = -y$ என்னும் வரைபடம் கிடைக்கும். இப்பொழுது $x = -y$ என்ற வரைபடம் ஒரு கோடான தால், இது மெய்யெண் தளத்தை இரு அரைத் தளங் களாகப் பிரிக்கும். படத்தில் காட்டியுள்ள π என்னும் அரைத்தளத்திலுள்ள புள்ளி களும் $y = -x$ என்னும் கோட்டின் புள்ளிகளனைத்தும் $y > -x$ என்னும் அசமன் பாட்டின் வரைபடம் எனச் சரி பார்க்கலாம்.



படம் 8-3.

எடுத்துக்காட்டு :

$$x + 2y < 5$$

$$X = \{ 2, 3, 4 \}, \quad Y = \{ 1, 2 \}$$

$$X \times Y = \{ (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1) (4, 2) \}$$

என்று எளிதாக எழுதலாம் (அல்லது அட்டவணையின் மூலம் எழுதுக). இங்குத் தீர்வுக் கணம் $\{ (2, 1) \}$ ஆகும்.

பயிற்சி 8·11

அட்டவணைப் படுத்தியோ அல்லது வேறு விதமாகவோ கீழ்க்கண்ட அசமன்பாடுகளின் தீர்வுக் கணத்தைக் கண்டுபிடி. X, Y என்பவை முறையே x, y இவற்றின் பிரதியீட்டுக் கணங்கள்.

(i) $x + 2y > 4$ $\quad X = \{1, 3, 5\}$.

$Y = \{0, 1, 3\}$

(ii) $x - y > 7$ $\quad X = \{1, 2, 3\}$.

$Y = \{-1, 3, 5\}$

(iii) $x + 2y < 4$ $\quad X = \{1, 3, 5\}$.

$Y = \{0, 1\}$

(iv) $4x + 5y > 7$ $\quad X = \{-4, -3, -2\}$.

$Y = \{1, 2, 3\}$

பயிற்சி 8·12

(1) $x + y > 1$-ன் வரைபடத்தை வரைக.

$X = \{x / x \in R\}$, $\quad Y = \{y / y \in R\}$

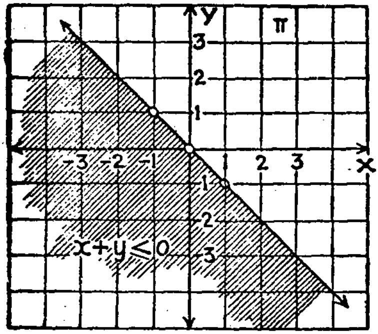
(2) $2x + y > 2$ $\quad$ .. $\quad$ ..

(3) $3x + 2y > 5$ $\quad$ .. $\quad$ ..

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x \in R$, $y \in R$ எனில், $x + y < 0$-ன் வரைபடத்தை வரை:

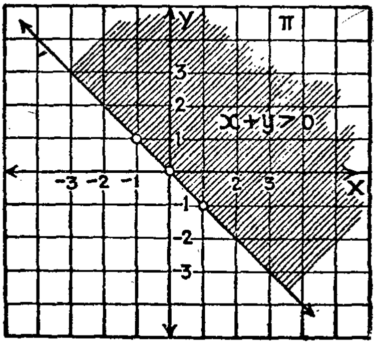
முன் எடுத்துக் காட்டில் கூறியதுபோலவே $y = -x$-ன் வரைபடம் வரை. முன்பு π என்ற அரைத் தளத்தின் புள்ளிகளை எடுத்துக் கொண்டது போலவே இப்பொழுது π-க்கு எதிர்ப்புறம் $y = -x$ என்ற கோட்டை விளிம்பாகக் கொண்ட மற்ற அரைத் தளத்தின் புள்ளிகளும் $x + y = 0$ என்ற வரைபடத்தின் புள்ளிகளும் சேர்ந்து $x + y < 0$ வின் வரைபடமாக அமையும்.



படம் 8-4.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

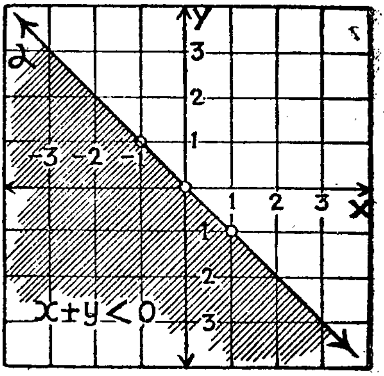
$x \in R$, $y \in R$. $x+y > 0$ என்றால், $y = -x$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளிகளைத் தவிர்த்து π-யிலுள்ள மற்ற புள்ளிகள் $x + y > 0$-வின் வரைபடமாகும்.



படம் 8-5.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $x+y < 0$ என்றால், $y = -x$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடத்தில் அமைந்த புள்ளிகள் நீங்கலாக, α என்னும் அரைத் தளத்துப் புள்ளிகளைத்தும் $x+y < 0$-வின் வரைபடத்தைக் குறிக்கும்.



படம் 8-6.

பயிற்சி 8·13

கீழ்க்கண்ட அசமன்பாடுகளின் படம் வரைக :

(1) $x + 2y > 8 \quad X = Y = R$

(2) $2x + y > 7 \quad X = Y = R$

(3) $x + 3y < 5 \quad X = Y = R$

(4) $x + 5y > -8 \quad X = Y = R.$

மேற்கண்ட பயிற்சிகளில் கொடுக்கப்பட்ட ஓர் அசமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணங்களைப் பற்றிப் பார்த்தோம்.

இப்பொழுது இரு அசமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டால் அவற்றைத் தீர்ப்பது பற்றிப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x + y > 5$ அல்லது $x + 2y > +6$ என்னும் ஒரு சோடி அசமன்பாடுகளைத்தீர் :

$$X = \{1, 2, 3\}, \quad Y = \{2, 3\}$$

$x + y > 5$-ன் தீர்வுக் கணம் $\{(2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ ஆகும்.

$x + 2y > 6$-ன் தீர்வுக் கணம் $\{(1, 3), (2, 2), (2, 3),$ $(3, 2), (3, 3)\}$ ஆகும்.

ஆகவே, $x + y > 5$ அல்லது $x + 2y > 6$-ன் தீர்வுக் கணம்

$$\{(2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \cup \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$= \{(1, 3), (2, 3), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x + y > 5$ ஆகவும், $x + 2y > 6$ ஆகவும் ஒருங்கே அமைய வேண்டும் என்க. (முந்தைய எடுத்துக்காட்டில் உள்ளபடியே) இப்பொழுது தீர்வுக்கணம்

$$\{(2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \cap \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$= \{(2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$ ஆகும்.

பயிற்சி 8·14

தீர் :

(1) $x + y > 3$ அல்லது $x + 2y > 8$

$$X = \{1, -1, 2, -2\}, \; Y = \{1, 2, 3\}$$

(2) $x + y < 4$ அல்லது $x - y < 3$

$$X = \{1, 2, 3\}, \; Y = \{1, 2\}$$

(3) $x - y > 3$ மேலும் $x + 2y > 8$

$$X = \{1, 2, 3\}, \; Y = \{2, 3\}.$$

எடுத்துக்காட்டு :

பூங்குழலியிடம் ரூ. 12 இருக்கிறது. இந்தத் தொகைக்குள் அவள் புத்தகங்களும் சில நோட்டுகளும் வாங்க விரும்புகிறாள். புத்தகம், நோட்டு இவற்றின் மொத்த எண்ணிக்கை 5-க்கு அதிகப்படாமல் இருக்க வேண்டும். ஒரு புத்தகம் ரூ. 2-ம், ஒரு நோட்டின் விலை 50 பைசாவும் என்றால், அவள் அதிகபட்சம் செலவழிக்கும் தொகை என்ன ?

அவள் x புத்தகமும் y நோட்டும் வாங்குவதானால், $x + y < 5$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஒரு புத்தகத்தின் விலை ரூ. 2

x புத்தகத்தின் விலை $2x$ ரூ.

ஒரு நோட்டின் விலை 0·50 ரூ.

y நோட்டின் விலை $\cdot 5y$ ரூ.

மொத்த விலை $= 2x + \cdot 5y < 10$ ஆகும்.

$4x + y < 20$ ஆகும்.

இங்கு x, y என்னும் மாறிகளின் பிரதியீட்டுக் கணம் N ஆக இருத்தல் அவசியமாகும்.

ஆகவே, $x + y < 5$, மேலும்

$4x + y < 20$-ன் தீர்வுக் கணம்

$= \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1),\} \cap$

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$

$(2, 1), (2, 8), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$

$(2, 7), (2, 9), (2, 10), (2, 11), (3, 1),$

$(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7),$

$(4, 1), (4, 2), (4, 3)\}.$

$= \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}.$

ஆகவே அவள் ஒரு புத்தகம், 4 நோட்டுக்கள், 2 புத்தகம் 3 நோட்டுக்கள், 3 புத்தகம் 2 நோட்டுக்கள் அல்லது 4 புத்தகம் ஒரு நோட்டும் வாங்குவாள். அவள் 4 புத்தகமும் 1 நோட்டும் வாங்கும் பொழுதே அதிகபட்சம் செலவு செய்வாள் என்பது வெளிப்படையானதாகையால், அவள் அதிகபட்சம் செலவழிக்கும் தொகை ரூ. $4 \times 2 + \cdot 50 = 8 \cdot 50$ ரூ. ஆகும்.

பயிற்சி 8·15

(1) தேன் மொழியிடம் ரூ. 15 இருக்கிறது. இத் தொகையை அவள் தோழிகளில் சிலருக்குப் பரிசுப் பொருள் வாங்கச் செலவழிக்க எண்ணுகிறாள். மொத்தப் பரிசுப் பொருள்கள் 8-க்குக் குறையாமல் இருக்க வேண்டும். அவள் ஒன்று ரூ. 1·25 என விற்கும் பந்து முனைப் பேனாக்கள் சிலவற்றையும், ரூ. 1·50 வீதம் விற்கும் நாட்குறிப்புப் புத்தகம் சிலவற்றையும் வாங்கத் தீர்மானித்தால் அவள் செலவழிக்கும் அதிகபட்சத் தொகை எவ்வளவு ?

(2) நான் 8 கிலோவிற்கு அதிகப்படாமல் காப்பிக் கொட்டை வாங்க விரும்புகிறேன். நான் கிலோ ரூ. 12 வீதம் விற்கும் முதல் ரக காப்பிக் கொட்டையோ அல்லது கிலோ ரூ. 9 வீதம் விற்கும் இரண்டாம் ரக கொட்டையோ வாங்கலாம். என்னிடமுள்ள பணம் ரூ. 60 என்றால், நான் செலவழிக்கக் கூடிய அதிகபட்சத் தொகை எவ்வளவு?

(3) ஒரு வியாபாரி தம்மிடமுள்ள ரூ. 50-க்கு மொத்தமாக 5 கிலோவிற்குக் குறையாமல் எண்ணெய் வாங்கி விற்க எண்ணுகிறார். அவர் 1 கிலோ ரூ. 8 வீதம் விற்கும் முதல் தர எண்ணெயுடன் ரூ. 6 வீதம் விற்கும் இரண்டாம் தர எண்ணெயை வாங்கி இரண்டையும் கலந்து விற்க எண்ணினால், அவர் செலவழிக்கக் கூடிய குறைந்த பட்சத் தொகை என்ன?

அசமன்பாட்டு சோடிகளின் வரைபடம்:

எடுத்துக்காட்டு 1:

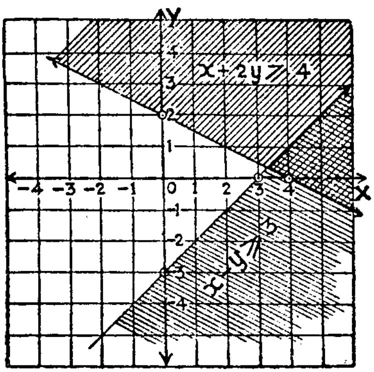
$x + 2y > 4$-ம்

$x - y > 3$-ம் ஒருங்கே அமையும் அசமன்பாட்டின் வரைபடத்தை வரைக.

முதலில் $x + 2y > 4$-ன் வரைபடத்தை வரைக.

இதேபோல் $x - y > 3$-ன் வரைபடத்தையும் வரைக.

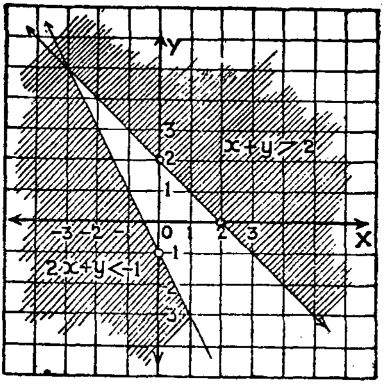
இவ்விரண்டு வரைபடங்களின் புள்ளிகளின் வெட்டுக் கணத்தின் புள்ளிகளே ஒருங்கமை அசமன்பாடுகளின் வரைபடமாகும்.



படம் 8-7.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x + y > 2$ அல்லது $2x + y < -1$-ன் வரைபடத்தை வரைக :



படம் 8-8.

இப்பொழுது மேலே கொடுத்த சோடி அசமன்பாடுகளின் வரைபடம் நிழற்படுத்திக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 8·16

முந்தைய பயிற்சிகளின் கணக்குகளுக்கும் பிரதியீட்டுக் கணம் 'R' என்று கொண்டு, வரைபடங்கள் வரைக.

9. பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

(Polynomials)

§1. எண் கோவைகள்

452 என்ற எண்ணை $4 \times 100 + 5 \times 10 + 2$ என்று விரித்தெழுதலாமல்லவா ?

அதாவது $(452)_{10} = 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 2 \times 10^0$.

இதே எண்ணை இரண்டு அடிமானத்தில் $(111\,000\,100)_2$ என்று எழுத முடியும்.

இதன் பொருள்

$$452 = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

இதையே 5 என்ற எண் அடிமானத்தில் எழுத $(3302)_5$ என்ற உருவம் கிடைக்கும். இதன் பொருள்,

$$452 = 3 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 2 \times 5^0$$

ஆகவே,

$$452_{10} = 111\,000\,100_2 = 3302_5 \text{ ஆகும்.}$$

மேற் கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளில், ஓர் எண்ணின் எண்ணுருவை எழுதிக்காட்ட எந்த அடிமானத்தை மேற் கொள்ளுகிறோமோ அந்த அடிமானத்தின் படிகளையும் கூட்டல் குறிகளையும் நீக்கிவிட்டு, அவற்றைப் பெருக்கும் எண்களை மட்டும் எழுதுகிறோம். ஆயினும், தேவைப்பட்டபோது, அந்த அடிமானத்தில் அவ்வெண்ணின் விரித்த உருவைக் கண்டு கொள்ள முடியும்.

இத்தகைய விரித்த உருவங்கள் எண் கோவைகள் எனப் படும்.

பயிற்சி 9·1

(1) 123 ஐ முறையே 10, 5, 2 இவற்றின் அடிமானத்தில் எண் கோவைகளாக எழுது.

$$(123 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$
$$= 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0$$
$$= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0)$$

(2) 147 ஐ முறையே 10, 5, 2 இவற்றின் அடிமானத்தில் எண் கோவைகளாக எழுது.

§2. பல்லுறுப்புக் கோவை

மேற்கூறிய எண் கோவைகளில், குறிப்பிட்ட எண் அடிமானத்திற்குப் பதிலாக, 'x' என்ற எழுத்தை எழுத முறையே,

$$4x^2 + 5x + 2,$$

$$x^8 + x^7 + x^6 + 0\cdot x^5 + 0\cdot x^4 + 0\cdot x^3 + x^2 + 0\cdot x + 0,$$
$$3x^3 + 3x^2 + 0\cdot x + 2$$

என்ற கோவைகள் கிடைக்கும். இக் கோவைகளை நாம் x என்ற **மாறியின் பல்லுறுப்புக் கோவை** என்கிறோம்.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளில் 10, 2, 5 என்ற எண்களுக்குப் பதிலாக, x என்ற எழுத்தை எழுதியுள்ளோம். பொதுவில், x எந்த எண்ணையும் குறிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$4 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5 = 222$$

என்பதால், x என்பது 7 ஐக் குறிப்பதாகக் கொண்டு, 222 ஐ $4x^2 + 3x + 5$ என்று எழுதலாம். x என்பது 11 ஐக் குறித்தால், $4x^2 + 3x + 5$ என்பது 522 ஐக் குறிக்கும் என்பதைக் காண்க. பொதுவில் x ஆனது எந்த மெய்யெண்ணையும் குறிக்கலாம். இதனால் x ஐ **மாறி** (Variable) என்று குறிப்பிடுகிறோம். மாறிகளை x, y, z போன்ற ஆங்கில எழுத்துகளைக் கொண்டு குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

x-ன் மதிப்பு என்னவென்று அறிந்தாலன்றி, $4x^2 + 3x + 5$ ஐ மேலே காட்டிய முறையில் சுருக்க முடியாது. ஆகவே, இதனையே ஒரு தனித்த பொருளாகக் (Single Entity) கருதுகிறோம்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில், பல உறுப்புகள் (terms) இருக்கும். இவ்வுறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையே பல்லுறுப்புக் கோவை. எடுத்துக்காட்டாக, $5x^3 - 7x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ என்னும் கோவை, $5x^3, -7x^2, 3x, -\frac{1}{2}$ என்ற நான்கு உறுப்புகளைக் கொண்டது. இதனை **நான்குறுப்புக் கோவை** என்கிறோம். $4x^2 + 5x + 2$ எனும் கோவையில், மூன்றுறுப்புகள் உள்ளன. இதை **மூவுறுப்புக் கோவை** என்கிறோம்.

x என்பது ஒரு மெய்யெண்ணைக் குறிப்பதால், x^2, x^3, ... என்பனவும் மெய்யெண்களையே குறிக்குமல்லவா?

எந்த எண்ணையும், பூச்சியத்தால் பெருக்கினால், பெருக்கல் பலன் பூச்சியமாதலால்,

$$0 \times x = 0,\ 0 \times x^2 = 0,\ 0 \times x^3 = 0, \ldots$$

என்பது வெளிப்படை. இதனால்,

$$4x^3 + 0 \times x^2 + 8x - \sqrt{3}$$

என்ற கோவையை,

$$4x^5 + 8x - \sqrt{3}$$

என்றே எழுதலாம். எனவே, இதனை மூவுறுப்புக் கோவையாகவே கருத வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$x^8 + x^7 + x^6 + 0 \times x^5 + 0 \times x^4 + 0 \times x^3 + x^2 + 0 \times x + 1$$

என்ற கோவையை

$$x^8 + x^7 + x^6 + x^2 + 1$$

என்று எழுத முடியுமாதலால், இஃது ஓர் ஐந்துறுப்புக் கோவையாகும்.

இதேபோல், $4x + 5$, $7y + 4$, $5z + 8$ என்ற கோவைகள் ஈருறுப்புக் கோவைகள் ஆகும். இக் கோவைகளின் மாறிகள் முறையே, x, y, z ஆகும். இக் கோவைகள் ஒவ்வொன்றும், ஏதேனும் ஒரே ஒரு மாறியின் ஈருறுப்புக் கோவைகளாகும். இவ்வாறே, $5x^3$, $2z^3$, $\sqrt{3}\,y$, 5, $4x$ என்பவை ஒவ்வொன்றும், ஓருறுப்புக் கோவையாகும். இதில், x, y, z என்னும் மாறிகள், கோவைகளின் மாறிகளாக உள்ளன. '5' என்ற ஓருறுப்புக் கோவையில், வெளிப்படையாக மாறி ஒன்றும் காணவில்லை. ஆயினும் 5 என்பதை $5 \times x^0$ என்று எழுதுவது கூடுமாகையால், 5 என்பதும் ஓர் ஓருறுப்புக் கோவையே. இதனை x ஐச் சாரா உறுப்பு (term independent of x) என்று வழங்குவோம்.

x எனும் ஒரு மாறியில் எழுதப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒன்று அடியில் தரப்பட்டுள்ளது :

$$8x^3 - 4x^2 + 7x - 20$$

இதில் x ஐச் சாரா உறுப்பு -20 ஆகும். இதைத் தவிர, x, x^2, x^3 ஆகிய x-ன் அடுக்குகளைக் கொண்ட உறுப்புகளும் உள்ளன. x ஐக் கொண்ட உறுப்பு $7x$; x^2 ஐக் கொண்ட உறுப்பு $-4x^2$, x^3 ஐக் கொண்ட உறுப்பு $8x^3$

x ஐக் கொண்ட உறுப்பைக் கவனிக்க. இது $7x$ ஆகும். இதனை $7 \times x$ என்று கருதலாமல்லவா ? இதனால், x ஐப் பெருக்கும் எண் 7 என்று தெரிகிறதல்லவா ? இந்த 7 ஐ, இக் கோவையில் x-ன் குணகம் (Coefficient) என்று குறிப்பிடுவோம்.

இக் கோவையில் x^2 ஐக் கொண்டுள்ள உறுப்பு $-4x^2$. இதனை $(-4) \times x^2$ என்று எழுதலாம். இங்கு x^2 ஐப் பெருக்கும் எண் -4. இக் கோவையில் இது x^2-ன் குணகம் எனப்படும்.

இவ்வாறே, இக் கோவையில் x^3-ன் குணகம் 8.

பொதுவில், ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில், x^n-ன குணகம் என்பது, அக் கோவையில், x^n ஐக் கொண்டுள்ள உறுப்பில், x^n ஐப் பெருக்கும் எண்ணாகும்.

பயிற்சி 9·2

(1) பின் வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளில், x, x^3, x^4, x^6 ஆகியவற்றின் குணகங்களைக் கூறுக :

(i) $4x^2 - 3x^3 + 7x - 8$ (ii) $4x^6 - 7x^4 + 4x^3 - 7$

(iii) $11x - 5$ (iv) $21x^9 + 15x^7 - 11x^5 + 6x^3 - 5x$

(2) முந்தைய கணக்கிலுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை ஒவ்வொன்றிலும் x ஐச் சாராத உறுப்பு யாது ?

(3) முந்தைய கணக்கிலுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை ஒவ்வொன்றும், ஈருறுப்புக் கோவையா, மூவுறுப்புக் கோவையா என்று கூறுக.

§3. ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் குணகங்கள் எண்களல்லவா ? இவ்வெண்கள், விகிதமுறு எண்களாகவோ, மெய் எண்களாகவோ இருக்கலாம். ஒரு கோவையின் குணகங்கள் விகிதமுறு எண்கள் எனில், அக் கோவையை, 'விகிதமுறு எண்கள் மீதான பல்லுறுப்புக் கோவை' என்றும், குணகங்கள் மெய்யெண்களாயின், அக் கோவையை 'மெய்யெண்களின் மீதான பல்லுறுபபுக் கோவை' என்றும் கூறுவோம்.

எடுத்துக்காட்டுகளாக,

$$4x^3 - \frac{2}{5}x^2 + 11x - \frac{4}{9},\ 25,\ 11x - 21,\ \frac{2}{3}x + \frac{4}{7}$$

ஆகியவை விகிதமுறு எண்களின் மீதான பல்லுறுப்புக் கோவைகள். $Q \subset R$ என்பதால், இவற்றை மெய்யெண்களின் மீதான பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகவும் கருதலாம். $7^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{3}\,x - 7$, $11^{\frac{1}{3}} x^2 - \pi x + \sqrt{2}$ ஆகியவை, மெய்யெண்களின் மீதான

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (இவற்றை, விகிதமுறு எண்களின் மீதான, பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகக் கருத இயலாது என்பதைக் கவனிக்க.)

பயிற்சி 9·3

(1) விகிதமுறு எண்களின் மீதான (i) ஒருறுப்பு (ii) ஈருறுப்பு (iii) பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் மூன்றை எழுது.

(2) மெய் யெண்களின் மீதான (i) மூவுறுப்பு (ii) பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் மூன்றை எழுது.

(3) கீழ்க்கண்ட கோவைகள், எவ்வகைப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்று கூறு :

(i) $7\frac{1}{2}x^5 - 17\frac{1}{4}x^3 + 16x^2 - 14\frac{1}{3}$

(ii) $100x^4 - 10x^2 + 5$

(iii) $3\sqrt{3}\,x^3 - 11x^2 + 11x - 3$

(iv) $\pi x^5 - \pi^2 x^3 + \pi^4 x$

(v) $\pi + 5$

(vi) $x + \pi$

(vii) $x + 1$

(viii) $x + \sqrt{64}$

§3. பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி

$4x^3 + 12x^2 - 7x + 5$ என்ற கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் $4x^3$ என்ற உறுப்பில் x-ன் படி 3, $12x^2$ என்ற உறுப்பில் x-ன்படி 2. $-7x$ என்ற உறுப்பில் x-ன்படி 1. 5 என்ற உறுப்பில் x-ன்படி 0. இந் நான்கு படிகளில் மிகப் பெரியது 3 அல்லவா? இதனை, இக் கோவையின் படி என்கிறோம்.

ஒரு கோவையின் படி என்பது, அதிலுள்ள உறுப்புகளின் படிகளில் மிகப் பெரியதாகும்.

$$4x^2y + 8x^3 + 6y^4 - 3xy^2 + 7xy - 3y + 8$$

என்ற கோவையில் இரு மாறிகள் உள்ளன. இதன் ஓர் உறுப்பு $4x^2y$; இதன் படியானது, இதிலுள்ள x, y இவற்றின் படிகளின்

கூட்டுத் தொகையாகும்; அதாவது $4x^2y$-ன் படி $= 2 + 1 = 3$. இவ்வாறே $7xy$ என்ற உறுப்பின் படி $= 1 + 1 = 2$.

இக் கோவையின் உறுப்புகளின் படிகள் முறையே 3, 3, 4, 3, 2, 1, 0. இவ்வெண்களில் மிகப் பெரியது 4. எனவே, இக் கோவையின் படி 4 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$3x^3y - 3xy^2 + 8xyz + 4z + 9$ என்ற x, y, z ஆகிய மூன்று மாறிகள் கொண்ட கோவையின் படி யாது?

$3x^3y$-ன் படி $= 3 + 1 = 4$

$-3xy^2$-ன் படி $= 1 + 2 = 3$

$8xyz$-ன் படி $= 1 + 1 + 1 = 3$

$4z$-ன் படி $= 1$

9-ன் படி $= 0$

இவ் வெண்களில் மிகப் பெரியது 4. எனவே, இக் கோவையின் படி 4.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

x, y, z என்ற மாறிகளில் 2 படியுள்ள ஒரு கோவையை எழுதுக.

இம் மாதிரி பல கோவைகள் உள்ளன.

அவற்றிலொன்று : $xy - 7$

மற்றொன்று : $3xy - 8yz + z^2 - 3x - 5z$.

பயிற்சி 9·4

(1) விகிதமுறு எண்கள் மேல் அமையும், x, y, z என்ற மாறிகளில் மூன்று பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எழுதி, அவற்றின் படிகளைக் கூறு.

(2) x, y என்ற இரு மாறிகளில், மூவுறுப்புக் கோவைகளில் இரண்டை எழுதி அவற்றின் படிகளைக் கூறு.

(3) மூன்றும் படியில் அமையுமாறு, x, y, z என்னும் மாறிகளின் ஏதேனுமொரு மூவுறுப்புக் கோவையை எழுது.

இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளில், ஒவ்வொன்றின் ஒவ்வோர் உறுப்பும், மற்றதன் ஓர் உறுப்பாக அமைந்திருக்குமானால் அக் கோவைகள் **சமமான கோவைகள்** (Equal polynomials) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$11x^2 - 7x + 12$-ம், $-7x + 11x^2 + 12$-ம் சமமானவை.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$3y + z^2 - 8xz + 4$-ம், $z^2 + 4 - 8xz + 3y$-ம் சமமானவை.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$3x + y + 5$-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் $z^2 + y + 5 + 3x$-ன் ஓர் உறுப்பாக இருக்கிறது. ஆனால், $z^2 + y + 5 + 3x$-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும், $3x + y + 5$-ன் ஓர் உறுப்பாக அமைந்திருக்கவில்லை (ஏன் ?) எனவே, இவ்விரு கோவைகளும் சமமாகா.

§5. சுருக்குதல்

$3x + 2x + 3$ என்ற கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் x ஐக் கொண்டுள்ள உறுப்புகள் இரண்டு உள்ளன. அவை $3x$, $2x$ ஆகும். x என்பது ஓர் எண்ணைக் குறிப்பதால், பங்கீட்டு விதியைப் பயன்படுத்தி இதனை $(3 + 2)x + 3$ அதாவது $5x + 3$ என்று எழுதலாம்.

$5x + 3$ ஆனது $3x + 2x + 3$ என்ற கோவையைச் சுருக்கிப் பெறப்பட்ட கோவையாகும்.

மாறியில் சம படிகளைக் கொண்டுள்ள உறுப்புகள் **ஓரின உறுப்புகள்** (Like terms) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

சுருக்குக : $8x + 3 + 4x + 5$

தீர்வு:

$8x + 3 + 4x + 5$

$= (8x + 4x) + (3 + 5)$ (வரிசை மாற்றுப் பண்பு)

$= (8 + 4)x + 8$ (பங்கீட்டுப் பண்பு, பெயர் மாற்றம்)

$= 12x + 8$ (பெயர் மாற்றம்)

எடுத்துக்காட்டு 2 :

சுருக்குக : $4x + 8 - 3x - 11$

தீர்வு :

$$4x + 8 - 3x - 11$$
$= (4x - 3x) + (8 - 11)$ (வரிசை மாற்று பண்பு)
$= (4 - 3)x + (-3)$ (பங்கீட்டு பண்பு, பெயர் மாற்றம்)
$= 1 \cdot x - 3$ (பெயர் மாற்றம்)
$= x - 3$ (பெருக்கல் சமனி)

எடுத்துக்காட்டு 3 :

சுருக்குக : $3 + 8x^2 + 4x - 10x^2 + 3x + 15$

தீர்வு :

$(8x^2 - 10x^2) + (4x + 3x) + (3 + 15)$ (வரிசை மாற்றுப் பண்பு)
$= (8 - 10)x^2 + (4 + 3)x + 18$ ஏன் ?
$= -2x^2 + 7x + 18$ ஏன் ?

[குறிப்பு : $8x^2 + 4x$ ஐச் சுருக்க முடியாது என்பதைக் காண்க. ஏனெனில், இங்குப் பங்கீட்டுப் பண்பைப் பயன்படுத்தினால் $4(2x^2 + x)$ என்றோ, அல்லது $4x(2x+1)$ என்றோதான் ஆகுமே தவிர, உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை குறையாது.]

எடுத்துக்காட்டு 4 :

சுருக்குக : $a - 3b + 4c^2 - 7b + 11c^2 - 5c + 8 + 2a$

தீர்வு :

$$a - 3b + 4c^2 - 7b + 11c^2 - 5c + 8 + 2a$$
$= (a+2a) + (-3b - 7b) + (4c^2 + 11c^2) - 5c + 8$
$= (1 + 2)a + (-3 - 7)b + (4 + 11)c^2 - 5c + 8$
$= 3a - 10b + 15c^2 - 5c + 8.$

பயிற்சி 9·5

முடிந்தவரை சுருக்குக :

(1) $8x + 3x + 1$ (2) $3x - 5x + 12$
(3) $x - 3 + 6x$ (4) $a - 3 + 11a + 3$

(5) $x^2 - 25 + 12 - x^2$ (6) $a^2 - 3a + 4 - 7a$

(7) $7a + 3b - 3a - 7b$ (8) $a - b + 3a + 4b$

(9) $x^2y + xy - 2x^2y + 7xy$

(10) $10x^2 - 7x + 5 + 2x^2 - 3x + 5$

(11) $x^2 + 5 - 2x^2 - 24 + 9x + 30 - 2x$

(12) $3xy - 4xz + 6xy - z + 8xz + 3 + 2z - 7$

§6. பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மதிப்பீடு

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மதிப்பு, மாறி எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்பையொட்டி மாறும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$4x^2 - 5x + 7$ என்ற கோவையில், $x = 2$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$4x^2 - 5x + 7\text{-ன் மதிப்பு } 4 \times 2^2 - 5 \times 2 + 7$$
$$= 16 - 10 + 7$$
$$= 13$$

என்று கிடைக்கும்.

இதேபோல் $x = 0$ என்றால்,

$$4x^2 - 5x + 7\text{-ன் மதிப்பு } 4 \times 0^2 - 5 \times 0 + 7$$
$$= 7 \text{ ஆகும்.}$$

$x = -2\frac{1}{2}$ என்று கொள்ள

$$4x^2 - 5x + 7\text{-ன் மதிப்பு } 4 \times (-2\tfrac{1}{2})^2 - 5 \times (-2\tfrac{1}{2}) + 7$$
$$= \frac{4 \times 25}{4} + \frac{5 \times 5}{2} + 7$$
$$= 44\tfrac{1}{2} \text{ ஆகும்.}$$

இதேபோல், x ஐ ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகக் கொண்டாலும், எடுத்துக் கொண்ட மூவுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பைக் கண்டு பிடிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டில் உள்ள மூவுறுப்புக் கோவையில் $x = \sqrt{5}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$4x^2 - 5x + 7$-ன் மதிப்பு

$$4 \times (\sqrt{5})^2 - 5\sqrt{5} + 7 = 4 \times 5 - 5 \times \sqrt{5} + 7$$
$$= 20 + 7 - 5 \times \sqrt{5}$$
$$= 27 - 5\sqrt{5} \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$4x^2 - 5y^2 + 4xy - 7$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில், x, y எனும் மாறிகள் முறையே, $2, -1$ என்ற மதிப்புகளை எடுத்துக் கொள்ளும்போது, இக் கோவையின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

$x = 2, \quad y = -1$ எனில்,

$$4x^2 - 5y^2 + 4xy - 7,$$
$$= 4 \times 2^2 - 5 \times (-1)^2 + 4 \times 2 \times (-1) - 7$$
$$= 4 \times 4 - 5 \times 1 + 4 \times 2 \times (-1) - 7$$
$$= 16 - 5 - 8 - 7$$
$$= -4$$

பயிற்சி 9·6

கீழ்க்காணும் கோவைகளின் மாறிகளுக்கு, அவற்றிற் கெதிரிலுள்ள அடைப்புகளில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் மதிப்புகளைப் பிரதியீடு செய்து கோவைகளின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(1)	$4x^2 + 3x + 2$	$(2, -1, 0)$
(2)	$3x^2 - 4x + 5$	$(1, 5, -3)$
(3)	$7x^3 - 6x^2 + 5x - 4$	$(0, 1, -1)$
(4)	$7x^2 - 6x + 5$	$(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$
(5)	$4x^3 - 7x + 5$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
(6)	$2x^3 - 6x^2 + 5x - 4$	$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
(7)	$6x^2 - 5xy + 7y^2$	$(x = 1, y = 1)$
(8)	$5x^3 - 6x^2 + 4y^2 - 7y + 8$	$(x = 2, y = -2)$
(9)	$4x^3 - 7y^3 + 8x^2y^2 - 5y$	$(x = \frac{1}{2}, y = 1)$

(10) $3x^3 - 6y^2 - 5y + 4x + 8$ $(x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2})$

(11) $x^2 + xy - y^2$ $(x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2})$

(12) $x^2 + 2xy + y^2$ $(x = \sqrt{3}, y = \sqrt{2})$

§7. பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளும், எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் (Zero Polynomials and Negative Polynomials)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில், குணகங்கள், விகிதமுறு எண்ணுகவோ, மெய்யெண்ணுகவோ இருக்கலாமென்று பார்த்தோம்.

ஏதேனுமொரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் குணகங்கள் எல்லாமே பூச்சியமானுல், அது பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$ என்பது x என்ற மாறியில், நான்கு உறுப்புகள் கொண்ட, பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$0 \cdot y^2 + 0 \cdot y + 0$ என்பது y எனும் மாறியில் அமையப் பெற்ற பூச்சிய மூவுறுப்புக் கோவையாகும்.

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமமாகவும், ஒத்த உறுப்புகளை உடையதாகவும் உள்ள இரண்டு ஒரே மாறிகளின் பல்லுறுப்புக் கோவைகளில், முதல் பல்லுறுப்புக் கோவையின் குணகங்கள் முறையே, இரண்டாவது பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒத்த உறுப்புகளின் குணகங்களின் எதிர் எண்களானுல், இக் கோவைகள் ஒவ்வொன்றும், மற்றதின் எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$4x^2 - 6x + 5$, $-4x^2 + 6x - 5$ இவை ஒவ்வொன்றும் மற்றதின் எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$4x^3 - 2x^2 - xy + 6y - 8$-ன் எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவை, $-4x^3 + 2x^2 + xy - 6y + 8$ ஆகும்.

பயிற்சி 9·7

கீழ்க்காணும் கோவைகளின் எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எழுது.

(1) $4x + 7$ (2) $5x - 6y + 5$

(3) $4x^2 - 3x + y - 7$ (4) $5x^2 - 7y^2 + 35xy - 7$

(5) $-8x^3 - 9y^2 + 6xy$ (6) $7xyz - x - y + z$

§8. பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்டுதல்

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்ட வேண்டுமென்றால், வரிசை மாற்றுப் பண்பு, பங்கீட்டுப் பண்பு இவற்றைப் பயன்படுத்தி, பல்லுறுப்புக் கோவைகளைச் சுருக்கி அமைத்தலில் செய்தது போல் செய்ய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$4x^2 - 5x + 7$, $3x + 7$, $-5x^2 + 6x$ இவற்றைக் கூட்டி எழுது.

$$(4x^2 - 5x + 7) + (3x + 7) + (-5x^2 + 6x)$$

$$= 4x^2 - 5x + 7 + 3x + 7 - 5x^2 + 6x$$

$$= (4x^2 - 5x^2) + (-5x + 3x + 6x) + (7 + 7)$$

[வ. மா. பண்பு]

$$= (4 - 5)x^2 + (-5 + 3 + 6)x + (7 + 7)$$ [ப. பண்பு]

$$= -x^2 + 4x + 14$$ [பெயர் மாற்றம்]

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோவைகளின் உறுப்புகள் மிகவும், அதிகமானதாகவும், மூன்று அல்லது நான்கு கோவைகளைக் கூட்ட வேண்டியிருந்தாலும், கூட்டுவது எளிதாக இருப்பதற்காக முதலில் கோவைகளை, மாறியின் படியின் இறங்கு (அல்லது ஏறு) வரிசையில் எழுதி, பின்னர்க் கோவைகளை, ஒன்றன் கீழ் ஒன்றாக ஓரின உறுப்புகள் ஒன்றன் கீழ் ஒன்றாக அமையுமாறும் எழுதிக் கொண்டு, அவ்வொத்த உறுப்புகளைக் கூட்டி எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

கூட்டுக : $4x^3 - 3x^2 + 7x - 6$, $7x^2 - 5x^3 - 5 + 4x$, $8 + 3x^3 - 2x + 7x^2$.

முதல் கோவை	$4x^3 - 3x^2 + 7x - 6$
இரண்டாம் கோவை	$-5x^3 + 7x^2 + 4x - 5$
மூன்றும் கோவை	$3x^3 + 7x^2 - 2x + 8$

கோவைகளின் கூட்டல் $(4 - 5 + 3)x^3 + (-3 + 7 + 7)x^2 + (7 + 4 - 2)x + (-6 - 5 + 8)$

$= 2x^3 + 11x^2 + 9x - 3.$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$4x^2 - 5xy + 4y - 7$ ஐ $-4x^2 + 5xy - 4y + 7$ உடன் கூட்டு.

$(4x^2 - 5xy + 4y - 7) + (-4x^2 + 5xy - 4y + 7)$

$= 4x^2 - 5xy + 4y - 7 - 4x^2 + 5xy - 4y + 7$

$= (4x^2 - 4x^2) + (-5xy + 5xy) + (4y - 4y) + (-7 + 7)$ (வ. மா. பண்பு)

$= (4 - 4)x^2 + (-5 + 5)xy + (4 - 4)y + (-7 + 7)$ (ப. பண்பு)

$= 0.x^2 + 0.xy + 0.y + 0.$ இது ஒரு பூச்சிய பல்லுறுப்புக் கோவை. கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோவைகளைப் பற்றி நீ என்ன அறிந்து கொள்கிறாய் ? இதிலிருந்து என்ன ஊகிக்கிறாய் ?

பயிற்சி 9·8

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்டுக.

(1) $4x - 7y + 8,\quad 6x + 5y - 4,\quad 5x + 6y + 6$

(2) $3x + 4y - 7,\quad 4y - 7x + 8,\quad 8 - 6y + 5x$

(3) $4x^2 - 4x + 5,\quad 3x^2 + 6 + 7x,\quad 4 - 8x^2 + 4x$

(4) $4x^2 - 5xy + 6,\quad 3x^2 + 4xy + 5,\quad 2x^2 - 7xy - 8$

(5) $2x^2 - 6 + 8xy,\quad 4 - 8x^2 - 7xy,\quad xy + 5 + 7x^2$

(6) $4x^2 + 5x - 6,\quad 4x + 6 + 5x^2,\quad 10 - 9x^2 - 9x$

(7) $x^2 + x - y,\quad y - x + x^2,\quad 2x^2$

(8) $4x^2 + 3xy + y,\quad 4xy - 7x^2,\quad 3x^2 - 7xy - y$

(9) $x^3 + x^2 - x - 1 + y,\quad x - y - x^3 - x^2 + 1$

(10) $4x^4 - 8x^2y + 9xy + 4,\quad 8x^2y + 4x^4 - 4$

§9. பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கழித்தல்

கூட்டல் கணக்கில் செய்ததுபோலவே, வரிசை மாற்றும் பண்பு, பங்கீட்டுப் பண்பு, இவற்றைப் பயன்படுத்தி, கழித்தல் கணக்கையும் செய்யவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$4x^2 - 7x + 5$-லிருந்து $7x^2 + 5x - 8$ ஐக் கழிக்கவும்.

$$(4x^2 - 7x + 5) - (7x^2 + 5x - 8)$$
$$= 4x^2 - 7x + 5 - 7x^2 - 5x + 8$$
$$= (4x^2 - 7x^2) + (-7x - 5x) + (5 + 8) \text{ (வ.மா. ப.)}$$
$$= (4 - 7)\,x^2 + (-7 - 5)\,x + (5+8) \text{ (பங்கீட்டுப் பண்பு)}$$
$$= -3x^2 - 12x + 13$$

கழித்தல் கணக்கில், ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையிலிருந்து, மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கழிப்பது, முதல் பல்லுறுப்புக் கோவையுடன், இரண்டாம் பல்லுறுப்புக் கோவையின் எதிர்ப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கூட்டுவதற்கு ஒப்பாகும்.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில்,

$4x^2 - 7x + 5$-லிருந்து $7x^2 + 5x - 8$ ஐக் கழிப்பதற்குப் பதில் $4x^2 - 7x + 5$ உடன் $-7x^2 - 5x + 8$ ஐக் கூட்டக் கிடைக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவையும், அவ்வெடுத்துக்காட்டில் கிடைத்துள்ள விடையும் ஒன்றாகும்.

அதாவது,

$$(4x^2 - 7x + 5) + (-7x^2 - 5x + 8)$$
$$= 4x^2 - 7x + 5 - 7x^2 - 5x + 8$$
$$= (4x^2 - 7x^2) + (-7x - 5x) + (5 + 8)$$
$$= (4 - 7)\,x^2 + (-7 - 5)\,x + 13$$
$$= -3x^2 - 12x + 13.$$

ஆகவே, இனிவரும், கணக்குகளில் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கழிப்பதற்கு பதிலாக, அப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் எதிர்க் கோவையைக் கூட்டி விடையைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$7x^2 - 4x + 3$-லிருந்து, $9x^2 - 8y^2 - 7$ ஐக் கழி.

$$(7x^2 - 4x + 3) - (9x^2 - 8y^2 - 7)$$

$$= (7x^2 - 4x + 3) + (-9x^2 + 8y^2 + 7)$$

$$= 7x^2 - 4x + 3 - 9x^2 + 8y^2 + 7$$

$$= (7x^2 - 9x^2) + (-4x) + (3 + 7) + (8y^2) \text{ (வ.மா.ப.)}$$

$$= (7 - 9)x^2 - 4x + (3 + 7) + (8y^2) \text{ (ப. பண்பு)}$$

$$= -2x^2 - 4x + 10 + 8y^2 \text{ (பெயர் மாற்றம்)}$$

பயிற்சி 9·9

இடப்புறம் கொடுத்துள்ள கோவைகளிலிருந்து, வலப்புறம் கொடுத்துள்ள கோவைகளைக் கழி.

(1)	$4x + 3$,	$2x + 1$
(2)	$4x + 7$,	$3x - 2$
(3)	$4x^2 + 8x + 5$,	$2x^2 - 4x - 5$
(4)	$8x^2 + 6xy - 5$,	$8x^2 - 5xy + 5$
(5)	$9x^2 + 6xy + x + y - 6$,	$4x^2 + x - y - 5$
(6)	$3x^3 + 2x^2 + 4x + 5$,	$x^3 + x^2 + x + 1$
(7)	$4x^2 - 5x + 8y - 7$,	$5x - 8y - 4x^2 + 7$
(8)	$6x^2 - 5xy + 4y^2 - 7$,	$4y^2 - 5xy + 6x^2 - 7$
(9)	$4x^4 - 8x^2y + 9xy + 4$,	$8x^2y + 4x^4 - 4$
(10)	$x^3 + x^2 - x - 1 + y$,	$x - y - x^3 - x^2 + 1$

§ 10. மற்றும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$4x + 5y + 8$ உடன் எதைக் கூட்ட,

$3x + 4y - 7$ கிடைக்கும்?

ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையையும், ஒரு தனித்த பொருளாகக் (single entity) கூறுவது இயலுமாதலால், $4x + 5y + 8$ என்ற கோவையை A என்றும், $3x + 4y - 7$ என்ற கோவையை B என்றும் எடுத்துக் கொள்ளலாமல்லவா?

இப்பொழுது, நாம் எடுத்துக்கொண்ட கணக்கு, A-யுடன் எதைக் கூட்ட B கிடைக்கும் என்பதாகும்.

C என்பது விடையானால்,

$$A + C = B$$

$$C + A = B \qquad \text{(மாற்றுப் பண்பு)}$$

$$(C + A) + (-A) = B + (-A) \qquad \text{(A-யின் கூட்டல் தலை கீழியை இருபுறமும் கூட்ட)}$$

$$C + (A + -A) = B + (-A) \qquad \text{(சேர்ப்புப் பண்பு)}$$

$$C + 0 = B + (-A) \qquad \text{(கூட்டல் தலை கீழி)}$$

$$C = B + (-A) \qquad \text{(கூட்டல் சமனி)}$$

ஆகவே, விடை 'C' என்னும் பல்லுறுப்புக் கோவை, $B - A$-க்குச் சமம்.

ஆகவே, விடை காண, $3x + 4y - 7$ என்ற மூவுறுப்புக் கோவையுடன், $4x + 5y + 8$ என்ற மூவுறுப்புக் கோவையின், எதிர்க் கோவையைக் கூட்டவேண்டும்.

$4x + 5y + 8$-ன் எதிர்க்கோவை, $-4x - 5y - 8$.

ஆகவே, விடை

$$= (3x + 4y - 7) + (-4x - 5y - 8) \qquad \text{எவ்வாறு?}$$

$$= (3x - 4x) + (4y - 5y) + (-7 - 8) \qquad ,,$$

$$= (3 - 4)x + (4 - 5)y + (-7 - 8) \qquad ,,$$

$$= -1x + (-1y) + (-15) \qquad ,,$$

$$= -x - y - 15 \qquad ,,$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$4x - 7y + 8$-லிருந்து, எந்தக் கோவையைக் கழிக்க $3x + 8y - 9$ என்ற கோவை கிடைக்கும்?

எடுத்துக்காட்டு 1-ல் செய்ததுபோலவே, இங்கும் விடை கண்டுபிடிக்கலாம்.

$4x - 7y + 8$ என்பது A ஆக இருக்கட்டும்.

$3x - 8y - 9$ என்பது B ஆக இருக்கட்டும்.

விடை 'C' எனும் கோவை எனில்,

$$A - C = B \qquad \therefore \quad C = A - B$$

ஆகவே, விடை கண்டுபிடிக்க, $4x - 7y + 8$ உடன், $3x + 8y - 9$-ன் எதிர்க் கோவையைக் கூட்டவேண்டும்.

விடை : $(4x - 7y + 8) + (-3x - 8y + 9)$

$= (4x - 3x) + (-7y - 8y) + (8 + 9)$ (வ. மா. ப.)

$= (4 - 3)x + (-7 - 8)y + (8 + 9)$ (ப. பண்பு)

$= (1.x) + -15y + 17$ (பெயர் மாற்றம்)

$= x - 15y + 17$

பயிற்சி 9·10

சுருக்குக :

(1) $4x + 5y + 7 - 4y + 3x$

(2) $3y - 4x - 8 + 4x - 5y + 10$

(3) $7xy - 5x^2 + y^2 - 4xy - 2y^2 + 4x^2$

(4) $6x + 7y + 8z - 14x - 13z + 10$

கீழே கொடுத்துள்ள கோவைகளைக் கூட்டுக.

(5) $4x + 3y$, $2y + 3z$, $2z + 5x$

(6) $x - y$, $y - z$, $z - x$

(7) $x^2 - 7y^2 + 8xy + 10$, $y^2 - 7x^2 - 6xy + 10$, $x^2 + y^2 - 2xy - 10$

(8) $x + y + z$, $3x + 2y + z$, $3z - 3y - 4x$

கீழே கொடுத்துள்ள கணக்குகளில், முதல் கோவையிலிருந்து இரண்டாம் கோவையைக் கழிக்க.

(9) $x + y + 2z$, $2x + y + z$

(10) $4x + 5y$, $x + y + z$

(11) $x^2 - 2xy + y^2$, $x^2 + 2xy + y^2$

(12) $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - 2xy + y^2$

(13) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$, $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

(14) $3xy + 5y - 8x$, $7y - 5xy - 10x$

(15) $x^2 + y^2$, $y^2 - z^2$

(16) $x^2 - y^2$, $z^2 - x^2$

(17) $4x + 5$ உடன் எந்தக் கோவையைக் கூட்ட, $5x + 4$ கிடைக்கும்?

(18) $4x - 3y + 2$ உடன், எந்தக் கோவையைக் கூட்ட, $2x - 4y + 3$ கிடைக்கும்?

(19) $x + y + z$ உடன், $2z + 3y + 4x$ ஐக் கூட்டி வரும் கோவையிலிருந்து $2x - 3y + z$ என்ற கோவையைக் கழி.

(20) $3x - 2y + z$ உடன் $z - y - x$ ஐக் கூட்டி வரும் கோவையிலிருந்து $2z - 3y + 2x$ ஐக் கழி.

(21) $x + y + z$-லிருந்து $2x - 3y + z$ ஐக் கழித்து வரும் கோவையுடன் $2z + 3y + 4x$ ஐக் கூட்டு.

(22) $3x - 2y + z$-லிருந்து $2z + 3y + 2x$ ஐக் கழித்து வரும் கோவையுடன் $z - y - x$ ஐக் கூட்டு.

(23) $4x - 6y$-லிருந்து எதைக் கழிக்க, $2x - y$ கிடைக்கும்?

(24) $2x - 3y - 4z$-லிருந்து எதைக் கழிக்க, $4x + 3y - 2z$ கிடைக்கும்?

§11. எண்களால் பெருக்கல்

பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எண்களால் பெருக்க, எண்களிடையேயுள்ள பங்கீட்டுப் பண்பு பயன்படுகிறது.

இதன்படி, கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவையை, விகிதமுறு எண் அல்லது மெய்யெண்ணால் பெருக்குவதற்கு, அப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும், எடுத்துக் கொண்ட விகிதமுறு எண்ணாலோ, மெய்யெண்ணாலோ பெருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$4x^2 - 3x + 2$ என்ற மூவுறுப்புக் கோவையை

$$\text{(a)}\ 2,\quad \text{(b)}\ \frac{4}{7},\quad \text{(c)}\ -5,\quad \text{(d)}\ \sqrt{2}$$

என்ற எண்களால் பெருக்குக.

(a) $(4x^2 - 3x + 2) \times 2$

$= 4x^2 \times 2 - 3x \times 2 + 2 \times 2$ (பங்கீட்டுப் பண்பு)

$= 2 \times 4 \times x^2 - 2 \times 3 \times x + 4$ (வரிசை மாற்றுப் பண்பு)

$= 8x^2 - 6x + 4$ (பெயர் மாற்றம்)

(b) $(4x^2 - 3x + 2) \times \frac{4}{7}$

$= 4x^2 \times \frac{4}{7} - 3x \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{4}{7}$

(பங்கீட்டுப் பண்பு)

$= \left(\frac{4}{7} \times 4\right)x^2 - \left(\frac{4}{7} \times 3\right)x + 2 \times \frac{4}{7}$

(வரிசை மாற்றுப் பண்பு)

$= \frac{16}{7}x^2 - \frac{12}{7}x + \frac{8}{7}$ (பெயர் மாற்றம்)

(c) $(4x - 3x + 2) \times (-5)$

$= 4x^2 \times (-5) - 3x \times (-5) + 2 \times (-5)$

(பங்கீட்டுப் பண்பு)

$= 4 \times (-5)x^2 + (-3 \times -5)x + (2 \times -5)$

(வரிசை மாற்றுப் பண்பு)

$= -20x^2 + 15x - 10$ (பெயர் மாற்றம்)

(d) $(4x^2 - 3x + 2) \times \sqrt{2}$

$4x^2 \times \sqrt{2} - 3x \times \sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

(பங்கீட்டுப் பண்பு)

$4 \times \sqrt{2} \times x^2 - 3 \times \sqrt{2} \times x + 2 \times \sqrt{2}$

(வரிசை மாற்றுப் பண்பு)

$4\sqrt{2}\,x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}$ (பெயர் மாற்றம்)

பயிற்சி 9·11

1 கீழே கொடுத்துள்ள கோவைகளை, அவற்றுக்கெதிரிலுள்ள எண்களால் பெருக்கவும்.

(1) $x^3 - 2x^2 + 1$ $(2, -2, \sqrt{2})$

(2) $3x^2 + 3x - 1$ $(3, 1\frac{1}{2}, \sqrt{3})$

(3) $2x^2 - x + 5$ $(-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 6)$

(4) $5 - 7x + x^2$ $\left(\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$

(5) $4x^2 - 5y^2 + 9$ $\qquad (3, -8, 4\sqrt{2})$

(6) $4x + 7y - 8xy$ $\qquad \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{\ }}\right)$

(7) $x^2 - x + y - 7$ $\qquad \left(5, \frac{1}{7}, \pi\right)$

(8) $2x^2 - y^3 + 7$ $\qquad (-\pi, +3{\cdot}14, -3{\cdot}1)$

(9) $x^2 + y - z$ $\qquad \left(\pi^2, -7, \frac{5}{7}\right)$

(10) $3x - 6y + 8$ $\qquad \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \pi^2\right)$

§12. பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்குதல்

பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒருறுப்புக் கோவையால் பெருக்கு வதற்கும் பங்கீட்டுப் பண்பே பயன்படுகிறது. கிடைக்கும் கோவையை, அடுக்குக்குறி விதிகளைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கி எழுதலாம்.

பல்லுறுப்புக்கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும், ஒருறுப் புக் கோவையால் பெருக்கக் கிடைக்கும் கோவையே, இவ்விரு கோவைகளின் பெருக்கற் பலனாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$(3x + 2) \times x = 3x \times x + 2 \times x = 3x^2 + 2x$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$(2x - 3) \times x^2 = 2x \times x^2 - 3 \times x^2 = 2x^3 - 3x^2$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$(4x^2 - 3x + 7) \times x^3 = 4x^2 \times x^3 - 3x \times x^3 + 7 \times x^3$$
$$= 4x^5 - 3x^4 + 7x^3$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$(x^3 - 7x) \times 3x^2 = x^3 \times 3x^2 - 7x \times 3x^2$$
$$= 3 \times x^2 \times x^3 - 7 \times 3 \times x \times x^2$$
$$= 3x^4 - 21x^3$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$(a + 3b - c) \times d = a \times d + 3b \times d - c \times d$$
$$= ad + 3bd - cd$$
அல்லது $= da + 3db - dc$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$(a^2 - 3ab + c) \times 3a = a^2 \times 3a - 3ab \times 3a + c \times 3a$$
$$= 3a^2 \times a - 3 \times 3 \times a \times a \times b + 3a \times c$$
$$= 3a^3 - 9a^2b + 3ac$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$$(4x^2 - 7xy + 5) \times 5xy$$
$$= 4x^2 \times 5xy - 7xy \times 5xy + 5 \times 5xy$$
$$= 20x^3y - 35x^2y^2 + 25xy$$

பயிற்சி 9·12

பெருக்குக :

(1) $(2y + 3) \times y$ (2) $(a - 3) \times a$

(3) $(x^2 + 2x) \times x$ (4) $(a^2 - 3) \times a^2$

(5) $(2b - 7) \times b$ (6) $(5y + 4) \times (-y^2)$

(7) $(a^2 - a + 1) \times a^3$ (8) $(2x^2 - x + 3) \times x^3$

(9) $(3y^2 - 5) \times y^3$ (10) $(4x^2 - 5x) \times 2x^2$

(11) $(3x^3 - 7x^2 + 1) \times (-2x^2)$

(12) $(a^3 - 1) \times 5a^2$ (13) $(x + 2y - z) \times w$

(14) $(a - b + 3c) \times 2d$ (15) $(p - 2q + 3r) \times (-3s)$

(16) $(a^2 - 3ab + 4b) \times 4a$

(17) $(a^2 - 2ab + b^2) \times (-3b)$

(18) $(a^2 - 4ab - 2b^2) \times 5c$

(19) $(2x^2 - 3xy - 7) \times 5xy$

(20) $(x^2 - 7xy + 3y^2) \times (-3xy)$

(21) $(x^2 - 3xy + 8y^2) \times (-7x^2)$

§13. இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலன்

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை, மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் பெருக்குவதற்கும், பங்கீட்டுப் பண்பையும், அடுக்குக் குறி விதிகளையுமே பயன்படுத்துகிறோம். இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எவ்வாறு பெருக்க வேண்டும் என்று அடியில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$4x^2 - 3x + 2$ ஐ $2x^2 + 4x - 3$ ஆல் பெருக்கு.

$$(4x^2 - 3x + 2) \times (2x^2 + 4x - 3)$$

$$= (4x^2 - 3x + 2) \times 2x^2 + (4x^2 - 3x + 2) \times 4x + (4x^2 - 3x + 2) \times -3$$

(வலப்புறப் பங்கீட்டுப் பண்பு)

$$= (4x^2 \times 2x^2 - 3x \times 2x^2 + 2 \times 2x^2) + (4x^2 \times 4x - 3x \times 4x + 2 \times 4x) + (4x^2 \times (-3) - 3x \times (-3) + 2 \times -3)$$

(வலப்புறப் பங்கீட்டுப் பண்பு)

$$= (8x^4 - 6x^3 + 4x^2) + (16x^3 - 12x^2 + 8x) + (-12x^2 + 9x - 6)$$

(அடுக்குக் குறி விதி, வ. மா. ப.)

$$= 8x^4 + (-6x^3 + 16x^3) + (4x^2 - 12x^2 - 12x^2) + (8x + 9x) - 6$$

(வரிசை மாற்றுப் பண்பு)

$$= 8x^4 + (-6 + 16)x^3 + (4 - 12 - 12)x^2 + (8 + 9)x - 6$$ (பங்கீட்டுப் பண்பு)

$$= 8x^4 + 10x^3 - 20x^2 + 17x - 6$$ (பெயர் மாற்றம்)

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$4x + 3y + 8$ ஐ $2x - 7y - 3$ ஆல் பெருக்குக.

தீர்வு : $(4x + 3y + 8) \times (2x - 7y - 3)$

$$= \left.\begin{array}{l}(4x + 3y + 8) \times 2x + (4x + 3y + 8) \times -7y \\ + (4x + 3y + 8) \times -3\end{array}\right\}$$ ஏன் ?

$$= \left.\begin{array}{l}(4x \times 2x + 3y \times 2x + 8 \times 2x) \\ + 4x \times (-7y) + 3y \times (-7y) + 8 \times (-7y) \\ + 4x \times (-3) + 3y \times (-3) + 8 \times (-3)\end{array}\right\}$$ ஏன் ?

$= (8x^2 + 6xy + 16x) + (-28xy - 21y^2 - 56y)$
$\qquad + (-12x - 9y - 24)$

$= 8x^2 + (6xy - 28xy) + (16x - 12x) + (-56y - 9y)$
$\qquad + (-21y^2) + (-24)$

$= 8x^2 + (6 - 28)\, xy + (16x - 12)\, x + (-56 - 9)\, y$
$\qquad - 21y^2 - 24$

$= 8x^2 - 22xy + 4x - 65y - 21y^2 - 24$

பயிற்சி 9·13

கீழே கொடுத்துள்ள கோவைகளைப் பெருக்குக :

(1) $4x^2 - 3x + 2$. $\quad 3x - 2$.

(2) $3y^2 - 2y + 5$, $\quad 4y + 7$

(3) $7x^2 - 7x + 15$. $\quad 3x^2 - 5x + 4$

(4) $5x^3 + 4x^2 - 7$. $\quad x^2 + x + 1$

(5) $x^2 + xy + y^2$. $\quad x + y$

(6) $2x^2 - 7xy + y^2$. $\quad 2x - y$

(7) $4x^2 + 2xy + y^2$. $\quad 2x - y$

(8) $x^2 - 3xy + 9y^2$. $\quad x + 3y$

(9) $3x^2 - 7xy + 4y^2$. $\quad x^2 + xy - 2y^2$

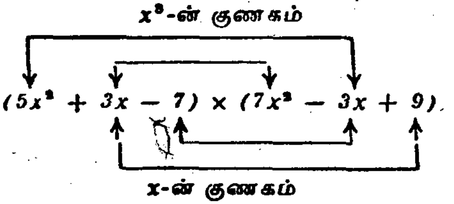
(10) $4x^2 + 5y^2 - 4x + 5y + 7$. $\quad 2x + y - 3$.

§14. பெருக்காமலேயே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலனிலுள்ள உறுப்புகளின் குணகங்களைக் கண்டு கொள்ளுதல்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$(5x^2 + 3x - 7)$ ஐ $(7x^2 - 3x + 9)$ ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவையில் x^3, x இவற்றின் குணகங்களைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :



x^3-ன் குணகம் காண	முதல் கோவையில் எடுத்துக் கொள்ளும் உறுப்பு	2ஆவது கோவையில் எடுத்துக் கொள்ளும் உறுப்பு	பெருக்கற் பலன்
(1)	$5x^2$	$-3x$	$-15x^3$
(2)	$3x$	$7x^2$	$21x^3$

ஆகவே, x^3-ன் குணகம் $21 - 15 = 6$ ஆகும்.

x-ன் குணகம் காண	முதல் கோவையில் எடுத்துக் கொள்ளும் உறுப்பு	2ஆவது கோவையில் எடுத்துக் கொள்ளும் உறுப்பு	பெருக்கற் பலன்
(1)	$3x$	9	$27x$
(2)	-7	$-3x$	$21x$

ஆகவே, x-ன் குணகம் (பெருக்கற்பலனில்) 48 ஆகும்.

இரு கோவைகளின் பெருக்கற்பலனில், x^3-ன் (அல்லது ஏதேனும் ஒரு மாறியின் ஒரு குறிப்பிட்ட படியின்) குணகத்தைக் கண்டுபிடிக்க, பெருக்கற்பலனில் x^3 எவ்விதங்களில் கிடைக்கும் எனப் பார்க்க வேண்டும்.

பெருக்கற்பலனில் x^3 பின்வருமாறு கிடைக்கும் :

(1) முதல் கோவையின் x^3 உறுப்பு × 2 ஆம் கோவையின் மாறிலி.

(2) முதல் கோவையின் x^2 உறுப்பு × 2 ஆம் கோவையின் x உறுப்பு.

(3) முதல் கோவையின் x உறுப்பு × 2 ஆம் கோவையின் x^2 உறுப்பு.

(4) முதல் கோவையின் மாறிலி × 2 ஆம் கோவையின் x^3 உறுப்பு.

இப்பொழுது மேற் கூறிய பெருக்கற்பலன்களில் கிடைத்துள்ள x^3-ன் குணகங்களின் கூடுதலே, முதலில் எடுத்துக் கொண்ட இரு கோவைகளின் பெருக்கற்பலனில் x^3-ன் குணகமாகும்.

பயிற்சி 9·14

பின்வரும் பெருக்கல்களை முழுதும் செய்யாமல், ஒவ்வொரு பெருக்கல் பலனிலும் கீழே குறித்துள்ளதன் குணகத்தைக் கண்டுபிடிக்க :

(1) $(2x^2 - 3x + 4) \times (x^2 - x - 1)$-ல் x^2-ன் குணகம்

(2) $(4x^2 + 3x - 2) \times (x^3 - x^2 + 1)$-ல் x^4-ன் குணகம்

(3) $(3a^3 - 3a^2 - 2a + 5) \times (2a^2 - a - 3)$-ல் a^3-ன் குணகம்

(4) $(2y^2 - y - 1) \times (y^2 + y - 1)$-ல் y-ன் குணகம்

(5) $(m^3 - m^2 + m - 1) \times (m^2 - m + 1)$-ல் m^2, m இவற்றின் குணகம்.

§15. ஒருமை பல்லுறுப்புக் கோவை (Unit Polynomial)

'1' என்ற எண், எந்த எண்ணைப் பெருக்கினாலும், எந்த எண்ணால் பெருக்கப்பட்டாலும், அதே எண்ணைத் திரும்பக் கொடுக்கும். இது 1-ன் ஒருமைப் பண்பாகிறது.

'1' என்பதை ஒருறுப்பு எண் கோவை என்றும் கருதலாம். '1' என்ற ஒருறுப்பு எண் கோவையால் எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையைப் பெருக்கினாலும், பெருக்கற்பலன், நாம் எடுத்துக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையாகவே இருக்கும்.

பண்புகள்

முழுக்கள் கணத்தில், கூட்டல் பெருக்கல் ஆகிய செயல்கள் சில பண்புகளைப் பெற்றுள்ளன என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள்.

விகிதமுறு எண்களின் (மெய்யெண்களின்) மீதான, பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கணத்தை P என்று குறிப்பிடுவோம். P-ன் உறுப்பு ஒவ்வொன்றும் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை, கணம் P-ல் கூட்டல், பெருக்கல் ஆகிய செயல்களை நாம் வரையறுத்துள்ளோம். இச் செயல்களும், முழுக்கள் கணத்தில் செய்யும் செயல்கள் பெற்றுள்ள ஒவ்வொரு பண்பையும் பெற்றுள்ளன. இவற்றை ஒவ்வொன்றாக இனி விவரிப்போம்.

கூட்டல் செயலின் பண்புகள்

கூட்டல் 1 : அடைவுப் பண்பு (Closure property) : இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல், ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$(4x+3)+(7x^2+3x+4)=7x^2+7x+7$$

கூட்டல் 2 : சேர்ப்புப் பண்பு (Associative property) :

எடுத்துக்காட்டு :

$$(4x+3)+\{(2x+1)+(x-1)\}=\{(4x+3)+(2x+1)\}+(x-1)=7x+3$$

கூட்டல் 3 : கூட்டல் சமனி (Additive identity) : பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூட்டல் சமனி, பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். அதாவது, பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையை, எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையுடனும் கூட்ட, அல்லது எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையையும், பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையுடன் கூட்ட, அதே பல்லுறுப்புக் கோவை கூட்டல் பலனாகக் கிடைக்குமென்று முன்பே பார்த்தோம்.

கூட்டல் 4 : கூட்டல் தலைகீழி (Additive inverse) : ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கும், அதன் எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவை, அப் பல்லுறுப்புக் கோவையின், கூட்டல் தலைகீழி யாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$4x^2-7x+5$-ன் கூட்டல் தலைகீழி $-4x^2+7x-5$ ஆகும். இவ்விரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூட்டல் பலன் $0.x^2+0.x+0$ ஆகும்.

கூட்டல் 5 : மாற்றுப் பண்பு (Commutative property) :

எடுத்துக்காட்டு :

$$(4x+3)+(7x+2)=(7x+2)+(4x+3)=11x+5.$$

பெருக்கல் செயலின் பண்புகள்

பெருக்கல் 1 : அடைவுப் பண்பு : இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலன் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$(2x+3)\times(3x+2)=6x^2+13x+6$$

பெருக்கல் 2 : சேர்ப்புப் பண்பு

எடுத்துக்காட்டு :

$$\{(2x+1)\times(x+3)\}\times(x-1)=(2x+1)\times\{(x+3)\times(x-1)\}=2x^3+5x^2-4x-3$$

பெருக்கல் 3 : பெருக்கல் சமனி : பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கல் சமனி ஒருமைப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். (1 ஆகும்). ஒருமைப் பல்லுறுப்புக் கோவையை, எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையால் பெருக்கினாலும் அல்லது ஒருமைப் பல்லுறுப்புக் கோவையால், எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையைப் பெருக்கினாலும், அதே பல்லுறுப்புக் கோவை பெருக்கற்பலனாகக் கிடைக்குமென்று முன்பே பார்த்தோம்.

பெருக்கல் 4 : மாற்றுப் பண்பு

எடுத்துக்காட்டு :

$$(2x+3)\times(x+2)=(x+2)(2x+3)=2x^2+7x+6$$

பெருக்கல் 5 : பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் (i) இடது (ii) வலது பங்கீட்டுப் பண்புகள் (Left and Right Distributive laws).

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$4x\times(7x+3)=4x\times 7x+4x\times 3$$
$$=28x^2+12x \quad \text{(இடது பங்கீட்டுப் பண்பு)}$$

இதேபோல்,

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$(7x+3)\times(4x)=7x\times 4x+3\times 4x$$
$$=28x^2+12x \quad \text{(வலது பங்கீட்டுப் பண்பு)}$$

பயிற்சி 9·15

(1) வேறு சில பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எடுத்துக் கொண்டு, மேற்கூறிய பண்புகளைச் சரிபார்க்கவும்.

(2) பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையால், எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையைப் பெருக்கினாலும், பூச்சியப் பல்லுறுப்புக்

கோவையை, எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையால் பெருக்கினாலும், பெருக்கற்பலன் பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவை என்பதை எடுத்துக்காட்டுடன் நிரூபிக்கவும்.

(3) சரி பார் :

(a) $\{(4x - 7)(7x - 4)\} \times \{(3x - 4)\}$
$= (4x - 7)(7x - 4)(3x - 4)$

(b) $(2x - 1)\{(x - 2) + (2x - 3)\}$
$\equiv (2x - 1)(x - 2) + (2x - 1)(2x - 3)$

(c) $\{7x - 5) + (5x - 3)\}(3x - 1)$
$\equiv \{(7x-5)(3x-1) + (5x-3)(3x-1)\}$

§16. பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல்

(1) ஒருறுப்புக் கோவையை, ஒருறுப்புக் கோவையால் வகுத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

x^3 ஐ 2 ஆல் வகு.

தீர்வு : $\dfrac{x^3}{2}$ அல்லது $\dfrac{1}{2}x^3$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$3x^2$ ஐ x ஆல் வகு.

தீர்வு : $\dfrac{3x^2}{x} = 3x$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

x^3 ஐ x^4 ஆல் வகு.

தீர்வு : $\dfrac{x^3}{x^4} = \dfrac{1}{x}$ (குறிப்பு : இது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையல்ல.)

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$x^3 . y^2$ ஐ xy^3 ஆல் வகு.

தீர்வு : $\dfrac{x^3 \cdot y^2}{xy^3} = \dfrac{x^3}{x} \times \dfrac{y^2}{y^3} = x^2 \times \dfrac{1}{y}$

$= \dfrac{x^2}{y}$ (இதுவும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையல்ல.)

(2) பல்லுறுப்புக் கோவைகளை ஒருறுப்புக் கோவையால் வகுத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^5 - x^3 + 3x^2 - 4x$ ஐ x ஆல் வகுக்க :

தீர்வு : $(x^5 - x^3 + 3x^2 - 4x) \div x$

$$= \frac{x^5}{x} - \frac{x^3}{x} + \frac{3x^2}{x} - \frac{4x}{x}$$

(எண்களிடையேயுள்ள பங்கீட்டுப் பண்புப்படி, இங்கு ஒவ்வோர் உறுப்பும் x ஆல் வகுக்கப்படுகிறது.)

$$= x^4 - x^2 + 3x - 4$$

இது பல்லுறுப்புக் கோவையா ?

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ ஐ x^2 ஆல் வகுக்க :

தீர்வு : $(x^3 - 4x^2 + 5x - 7) \div x^2$

$$= \frac{x^3}{x^2} - \frac{4x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{7}{x^2}$$

$$= x - 4 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}$$

இது பல்லுறுப்புக் கோவையா ?

பயிற்சி 9·16

கீழே கொடுத்துள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை வகுத்தல்களைச் செய்க. வகுத்தற் பலன் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையா, இல்லையா என்று கூறுக :

(1) $4x^3 - 7x^2 + 9x - 5 \div 4$

(2) $7x^2 - 5x + 4 \div x$

(3) $7x^2y^2 - 5xy + 8x + 6 \div y^2$

(4) $x^3 - y^3 + x^2 - y^2 + x + y - 1 \div xy$

(5) $2x^3 + y^3 + 4x^2y - 3y + 5 \div 6xy$

(3) ஒரு மாறியில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை ஈருறுப்பு, மூவுறுப்புக் கோவைகளால் வகுத்தல் (மீதியின்றி வகுபடும் கோவைகள்)

இவ்வித வகுத்தல் கணக்குகளை, எண்களில் நீண்ட முறை (Long Division) வகுத்தல் கணக்குகள் செய்வது போலவே செய்ய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^2 + 5x + 6$ ஐ $(x + 3)$ ஆல் வகு.

முதலில் கொடுத்துள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளிலுள்ள உறுப்புகளை, x-ன் அடுக்குகளைப் பொறுத்து, இறங்கு வரிசையில் எழுதிக் கொள்ள வேண்டும்.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x + 2 \\
\hline
x + 3 & x^2 + 5x + 6 \\
 & x^2 + 3x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 2x + 6 \\
 & \qquad 2x + 6 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

(1) ஈவில் முதல் உறுப்பு $\frac{x^2}{x} = x$.

(2) x ஆல் $(x + 3)$ ஐப் பெருக்க $x^2 + 3x$ கிடைக்கும். இதை, வகுபடும் எண்ணின் $x^2 + 5x$-ன் கீழ் எழுதிக் கொள்ள வேண்டும்.

(3) $x^2 + 5x$-லிருந்து $x^2 + 3x$ ஐக் கழித்து வரும் $2x$ ஐ அதன்கீழ் எழுதி, வகுபடும் எண்ணின் அடுத்த உறுப்பை, $2x$-ன் பக்கத்தில் எழுதிக்கொள்.

(4) ஈவின் அடுத்த உறுப்பு $\frac{2x}{x} = 2$.

(5) 2 ஆல் $(x + 3)$ ஐப் பெருக்க $2x + 6$ கிடைக்கும். இதே போல் தொடர்ந்து செய்யவும்.

$x^2 + 5x + 6$ ஐ, $x + 3$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவை $x + 2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$y^3 + 1$ ஐ $y + 1$ ஆல் வகு.

முதலில் $y^3 + 1$ என்ற ஈருறுப்புக் கோவையை y என்ற மாறியின், மற்ற எல்லாப் படிகளையும் '0' என்ற குணகத்தால் பெருக்கி, இறங்கு வரிசையில் எழுதவேண்டும். பிறகு எடுத்துக்காட்டு 1-ல் கூறியதுபோல் வகுக்க வேண்டும்.

தீர்வு :

$$\begin{array}{r|l} & y^2 - y + 1 \\ \hline y+1 & y^3 + 0\cdot y^2 + 0\cdot y + 1 \\ & y^3 + y^2 \\ \hline & \quad -y^2 + 0\cdot y \\ & \quad -y^2 - y \\ \hline & \qquad\quad y + 1 \\ & \qquad\quad y + 1 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

(1) $\dfrac{y^3}{y} = y^2$

(2) $(y+1)\,y^2 = y^3 + y^2$

(3) $\dfrac{-y^2}{y} = -y$

(4) $(y+1) - y = -y^2 - y$

(5) $\dfrac{y}{y} = 1$

$y^3 + 1$ ஐ $y + 1$ ஆல் வகுத்து வரும் ஈவு $y^2 - y + 1$.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x^2 + 2xy + y^2$ ஐ $x + y$ ஆல் வகு.

$$\begin{array}{r|l} & x + y \\ \hline x+y & x^2 + 2xy + y^2 \\ & x^2 + xy \\ \hline & \quad xy + y^2 \\ & \quad xy + y^2 \\ \hline & \qquad\quad 0 \end{array}$$

(1) $\dfrac{x^2}{x} = x$

(2) $(x+y)\,x = x^2 + xy$

(3) $\dfrac{xy}{x} = y$

(4) $(x+y)\,y = xy + y^2$

$x^2 + 2xy + y^2$ ஐ $x + y$ ஆல் வகுத்து வரும் ஈவு $x + y$.

பயிற்சி 9·17

(1) $(x^2 + 8x + 12) \div (x + 2)$

(2) $(x^2 - 8x + 15) \div (x - 5)$

(3) $(x^2 - 2x - 24) \div (x - 6)$

(4) $(x^2 + 2x - 24) \div (x - 4)$

(5) $(x^4 - 2x^2 + 1) \div (x^2 - 1)$

(6) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \div (x - 3)$

(7) $(8x^3 - 6x^2 - 17x + 15) \div (4x - 5)$

(8) $(8x^3 - 10x^2 - 13x + 15) \div (2x - 3)$

(9) $(y^3 + 64) \div (y + 4)$

(10) $(x^3 - z^3) \div (x - z)$.

(4) பல்லுறுப்புக்கோவையை மூவுறுப்புக்கோவையால் வகுத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ ஐ $x^2 - 4x + 3$ ஆல் வகுக்க :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 6x + 8 \\
\hline
x^2 - 4x + 3 & x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 \\
 & x^4 - 4x^3 + 3x^2 \\
\hline
 & -6x^3 + 32x^2 - 50x \\
 & -6x^3 + 24x^2 - 18x \\
\hline
 & 8x^2 - 32x + 24 \\
 & 8x^2 - 32x + 24 \\
\hline
\end{array}
$$

ஈவு : $x^2 - 6x + 8$

வழி :

(1) $\dfrac{x^4}{x^2} = x^2$

(2) $x^2 - 4x + 3 \times x^2 = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

(3) $-\dfrac{6x^3}{x^2} = -6x$

(4) $x^2 - 4x + 3 \times -6x = -6x^3 + 24x^2 - 18x$

(5) $\dfrac{8x^2}{x^2} = 8$

(6) $x^2 - 4x + 3 \times 8 = 8x^2 - 32x + 24$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^4 - 10x^2 + 9$ ஐ $x^2 + 4x + 3$ ஆல் வகுக்க. முதலில் $x^4 - 10x^2 + 9$ ஐ x-ன் 4, 4-க்கு கீழேயுள்ள எல்லா படிகளிலும் (இறங்கு வரிசையில்) எழுது.

$$
\begin{array}{r|l|c}
 & x^2 - 4x + 3 & \text{வழி} \\
x^2 + 4x + 3 & x^4 + 0x^3 - 10x^2 + 0x + 9 \; (& ? \\
 & x^4 + 4x^3 + 3x^2 & ? \\
\hline
 & \quad - 4x^3 - 13x^2 + 0x & ? \\
 & \quad - 4x^3 - 16x^2 - 12x & \\
\hline
 & \qquad\qquad 3x^2 + 12x + 9 & \\
 & \qquad\qquad 3x^2 + 12x + 9 & \\
\hline
\end{array}
$$

ஈவு : $x^2 - 4x + 3$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x^2y^2 - 9x^2 - 4y^2 + 36$ ஐ $x^2 - 4$ ஆல் வகுக்க.

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^2 - 9 \\
x^2 - 4 & x^2y^2 - 9x^2 - 4y^2 + 36 \; (\\
 & x^2y^2 \qquad\quad - 4y^2 \\
\hline
 & \quad - 9x^2 + 0 \quad + 36 \\
 & \quad - 9x^2 \qquad\;\; + 36 \\
\hline
\end{array}
$$

(1) $\frac{x^2y^2}{x^2} = y^2$

(2) $-?$

(3) $\frac{-9x^2}{x^2} = -9$

(4) ?

ஈவு : $y^2 - 9$

பயிற்சி 9·18

(1) $(2x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (x^2 + 2x + 1)$

(2) $(2x^3 - 5x^2 + 4x - 1) \div (x^2 - 2x + 1)$

(3) $(x^6 - x^4 - x^2 + 1) \div (x^2 + 2x + 1)$

(4) $(4x^3 + 4x^2 - 5x - 3) \div (2x^2 - x - 1)$

(5) $(24x^4 + 146x^3 + 409x^2 + 326x + 120)$
$\div (2x^2 + 7x + 6)$

(6) $(x^6 - x^4 - x^3 + 1) \div (x^2 - 2x + 1)$

(7) $(2x^3 - yx^2 - 2y^2x + y^3) \div (2x^2 - 3xy + y^2)$

(8) $(4x^3 + 4yx^2 - y^2x - y^3) \div (2x^2 + 3xy + y^2)$

சில சமயம், சில பல்லுறுப்புக் கோவைகள், கொடுக்கப் பட்ட மூவுறுப்பு அல்லது ஈருறுப்புக் கோவையால், மீதியில்லா மல் வகுபடாது. அப்பொழுது நாம், எண் கணிதத்தில் செய்வது போலவே, கோவைகளை வகுத்து, ஈவு மீதி இவற்றைத் தனித் தனியாக எழுதவேண்டும். ஈவும் மீதியும் பல்லுறுப்புக் கோவை களாகவும், மீதியின் படி, வகுக்கும் கோவையின் படியை விடக் குறைவாகவும் இருக்கும் வரை செயல்படவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$4x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ ஐ $2x + 1$ ஆல் வகுத்து. ஈவு மீதி இவற்றைக் கண்டுபிடி.

இப்பொழுதும் வகுத்தலை முன்போலவே செய்து கடைசி படியில் கிடைக்கும் மீதியை எழுதவேண்டும்.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 2 \\
\hline
2x + 1 & 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \\
 & 4x^3 + 2x^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad 4x + 1 \\
 & \qquad\qquad 4x + 2 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad -1
\end{array}
$$

ஈவு : $2x^2 + 2$

மீதி : -1

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ ஐ $x^2 + 2x + 1$ ஆல் வகுத்து. ஈவு, மீதி இவற்றைக் கண்டுபிடி.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 6x^2 - 7x + 12 \\
\hline
x^2 + 2x + 1 & 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2 \\
 & 6x^4 + 12x^3 + 6x^2 \\
\hline
 & -7x^3 - 2x^2 + 3x \\
 & -7x^3 - 14x^2 - 7x \\
\hline
 & 12x^2 + 10x + 2 \\
 & 12x^2 + 24x + 12 \\
\hline
 & -14x - 10 \\
\hline
\end{array}
$$

ஈவு : $6x^2 - 7x + 12$

மீதி : $-14x - 10$.

பயிற்சி 9·19

பின்வரும் வகுத்தல் கணக்குகளில் ஈவு, மீதி இவற்றைக் கண்டுபிடி :

(1) $(5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1) \div (x^2 - x + 1)$

(2) $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) \div (x^2 + x + 1)$

(4) $(2x^6 + x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 2) \div (x^2 - x + 2)$

§ 17. பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் குணகங்களைப் பிரித்து எழுதுதல் (Detached Co-efficients)

(a) ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை, மற்றொன்றால் பெருக்கவோ, அல்லது வகுக்கவோ வேண்டுமென்றால் மாறிகளின் படிகளை எழுதுவது அவசியமில்லை. முதலில் அக் கோவைகளை, மாறியின் படிகளின் இறங்கு (அல்லது ஏறு) வரிசையில் எழுதி, அதே வரிசையில், மாறியை நீக்கிவிட்டு, அவற்றின் குணகங்களை மாத்திரம் எழுதி, பெருக்கவோ, வகுக்கவோ செய்யலாம். இவ்வகையில் பெருக்கல் வகுத்தல்கள், வேகமாகவும், சுருக்கமாகவும் செய்யப்படுகின்றன.

கீழே காட்டியுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் பெருக்கல்கள் இரு முறைகளிலும் செய்யப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$4x^3 - 2x^2 + x - 5$ ஐ $x^2 - x + 1$ ஆல் பெருக்குக.

சாதாரண முறை	சுருக்கு முறை
$4x^3 - 2x^2 + x - 5$ $x^2 - x + 1$	$4 - 2 + 1 - 5$ $1 - 1 + 1$
$4x^5 - 2x^4 + x^3 - 5x^2$ $- 4x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x$ $4x^2 - 2x^2 + x - 5$ $4x^5 - 6x^4 + 7x^3 - 8x^2$ $+ 6x - 5$	$4 - 2 + 1 - 5$ $- 4 + 2 - 1 + 5$ $4 - 2 + 1 - 5$ $4 - 6 + 7 - 8 + 6 - 5$ ஆகவே பெருக்கற் பலன் $4x^5 - 6x^4 + 7x^3 - 8x^2$ $+ 6x - 5$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$2x^3 + 5x - 7$ ஐ $2x^2 - 3x + 5$ ஆல் பெருக்குக.

சாதாரண முறை	சுருக்கு முறை
$2x^3 + 0x^2 + 5x - 7 \times$ $2x^2 - 3x + 5$	$2 + 0 + 5 - 7 \times$ $2 - 3 + 5$
$4x^5 + 0x^4 + 10x^3 - 14x^2$ $-6x^4 + 0x^3 - 15x^2 + 21x$ $+ 10x^3 + 0x^2 + 25x - 35$	$4 + 0 + 10 - 14$ $- 6 + 0 - 15 + 21$ $10 + 0 + 25 - 35$

$4x^5 - 6x^4 + 20x^3 - 29x^2 + 46x - 35$	$4 - 6 + 20 - 29 + 46 - 35$

ஆகவே பெருக்கற் பலன்

$$4x^5 - 6x^4 + 20x^3 - 29x^2 + 46x - 35$$

பயிற்சி 9·20

குணகங்களைப் பிரித்தெழுதிப் பெருக்குக :

(1) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 \times 2x^2 - x + 7$

(2) $7x^4 - 5x^2 + 7x - 3 \times x^2 + x + 1$

(3) $4 - 7x + 8x^2 - x^3 \times x^2 + 1 - 7x$

(4) $5x^3 - 6x + 4x^2 - x^4 + 10 \times 4x - 2 + 3x^2$

(b) குணகங்களைப் பிரித்தெழுதி வகுத்தலும் செய்யலாம் பெருக்கல் கணக்கில் செய்தது போலவே, இங்கும் மாறியின் படியின் இறங்கு (அல்லது ஏறு) வரிசையில் கொடுத்துள்ள கோவைகளை எழுதி வகுக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$(2x^3 + 11x^2 + 17x + 6)$ ஐ $(2x^2 + 5x + 2)$ ஆல் வகுக்க :

சாதாரண முறை :

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad x + 3 \\ \hline 2x^2 + 5x + 2 & 2x^3 + 11x^2 + 17x + 6 \\ & 2x^3 + 5x^2 + 2x \\ \hline & \quad\quad 6x^2 + 15x + 6 \\ & \quad\quad 6x^2 + 15x + 6 \\ \hline \end{array}$$

சுருக்கு முறை :

	$1+3$
$2+5+2$	$2+11+17+6$
	$2+5+2$
	$6+15+6$
	$6+15+6$

ஈவு : $x+3$.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

குணகங்களைப் பிரித்து வகுக்கும் முறையில் வகுத்து ஈவு, மீதியைக் காண்.

$x^4 - 8x^2 + 15 \div x^2 - 2x + 3$

தீர்வு :

	$1+2-7$ ஈவு
$1-2+3$	$1+0-8+0+15$
	$1-2+3$
	$2-11+0$
	$2-4+6$
	$-7-6+15$
	$-7+14-21$
	$-20+36$ மீதி

ஈவு x^2+2x-7, மீதி $-20x+36$.

பயிற்சி 9·21

குணகங்களைப் பிரித்தெழுதி, வகுத்து, ஈவு, மீதி இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(1) $(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) \div (x^2 + 3x + 2)$

(2) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \div (x^2 - 5x + 6)$

(3) $(x^4 + x^2 + 1) \div (x^2 + x + 1)$

(4) $(x^5 + 1) \div (x + 1)$

(5) $(x^5 - 1) \div (x - 1)$

(6) $(6x^3 - 5x^2 + 4x - 7) \div (x^2 - x + 1)$

(7) $(x^3 + 5x^2 - x + 4) \div (x^2 - x + 1)$

(8) $(x^4 - 4x^3 + 12x - 12) \div (x^2 + 1)$

§18. சூத்திரத்தை மாற்றி அமைத்தல்

கணிதத்தில் நாம் பல சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்து கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவைக் காண $A = lb$ என்பது சூத்திரம். இதில் l, b கொடுக்கப்பட்டால் A-யைக் காண்கிறோம். செவ்வகமொன்றின் பரப்பளவும், நீளமும் கொடுக்கப்பட்டு, செவ்வகத்தின் அகலம் காண அதே சூத்திரத்தை மாற்றி அமைத்து $b = ?$ என்று கண்டுபிடிக்கவேண்டும்.

$$A = lb$$

$$lb = A \quad \text{(சமச்சீர் பண்பு)}$$

இங்கு $l \neq 0$.

இருபுறமும் lஆல் வகுக்க :

$$b = \frac{A}{l}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$S = ut + \frac{1}{2} at^2$ என்ற சூத்திரத்தில் aஐ u, t, S இவற்றின் மூலம் கண்டுபிடி.

$$S = ut + \frac{1}{2} at^2 \qquad \text{(எடுகோள்)}$$

$$ut + \frac{1}{2} at^2 = S \quad \text{(சமச்சீர்ப் பண்பு)}$$

$$\frac{1}{2} at^2 + ut = S \quad \text{(கூட்டுதலின் மாற்றுப் பண்பு)}$$

$$\frac{1}{2}at^2 + ut + (-ut) = S + (-ut)$$

$$\frac{1}{2}at^2 + 0 = S - ut$$ (எதிர் மாறிகளின் கூட்டல் பண்பு)

$$a = \frac{2(S - ut)}{t^2}$$ $\left(\frac{t^2}{2}\right.$-ன் தலை கீழியால் பெருக்க$\left.\right)$.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ என்ற சூத்திரத்தில் g ஐ t, l மூலம் கண்டு பிடி.

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$t^2 = 4\pi^2\frac{l}{g}$$ (சமன்பாட்டின் இருபுறத்தையும் வர்க்கமாக்க)

$$4\pi^2 l \times \frac{1}{g} = t^2$$ (சமச்சீர், தொடர்புப் பண்புகள்)

$$\frac{1}{g} = \frac{t^2}{4\pi^2 l}$$ (எதிர் மாறியால் பெருக்குதல்)

$$g = \frac{4\pi^2 l}{t^2}$$ (இரு பக்கங்களின் தலைகீழி)

பயிற்சி 9·22

பின்வரும் சூத்திரங்களை மாற்றி அமைத்துக் குறிப்பிட்ட ஒரு மாறியை மற்ற மாறிகளின் உதவியால் கண்டுபிடி.

(1)	P	$= 4a$.	[a]
(2)	A	$= \frac{1}{2}bh$.	[h]
(3)	P	$= 2(l + b)$.	[b]
(4)	A	$= \frac{1}{2}pe$.	[e]
(5)	V	$= \frac{\pi}{3}a^2h$.	[h]

(6)	A	$= \pi r(l + r)$.	[l]
(7)	A	$= 2h(a + b)$.	[h]
(8)	V^2	$= u^2 + 2as$	[s]
(9)	F	$= \frac{9}{5}C + 32$	[C]
(10)	S	$= \frac{(100 - g)}{100}c$	[g]

§ 19. பல்லுறுப்புக் கோவைச் சார்பு

(1) $4x + 5$, $x^2 - 2x + 2$ போன்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கொண்டு மெய்யெண் கணத்தில் ஒரு சார்பை வரையறுக்கலாம். $x \in \mathrm{R}$ எனில் $4x + 5$ என்ற எண்ணும் R-ல் இருக்குமல்லவா? இவ்வாறு, x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் இசைந்தபடி $4x + 5$ என்ற ஒரே ஓர் எண் வரையறுக்கப் படுகிறது. இவ்விதம் ஒரு சார்பு f கிடைக்கிறது. இதன்படி $f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ என்பது, $f(x) = 4x + 5$ என்ற விதிப்படி வகுக்கப் பட்ட சார்பு. இத்தகைய சார்பினைப் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சார்பு என்கிறோம்.

இவ்வாறே $x^2 - 2x + 2$, $5x - 9$, $x^3 + 5x + 8$ போன்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் சார்புகளை வரையறுக்கின்றன. $f(x)$ என்பதற்குப் பதிலாக y, z போன்ற ஒரே எழுத்தையும் பயன் படுத்தலாம். $(4x + 5)$-வினுல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பலனை $y = 4x + 5$ என்று எழுதலாம். x என்பது மாறி, y என்பது அதற்கிசைந்த சார்பலன். "x-க்கு $4x + 5$ ஐச் சேர்க்க வேண்டும்" என்ற விதிதான் சார்பு.

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$ என்ற சூத்திரத்தை எடுத்துக்கொண்டால் 'C'-ன் மதிப்பு, F-ன் மதிப்பைச் சார்ந்து மாறுபடுகிறது. இப்போது F-ன், குறிப்பிட்ட சில மதிப்புகளுக்கு C-ன் மதிப்பு என்னவென்று பார்ப்போம்

(1) $F = 122$ என்றால்

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$= \frac{5}{9}(122 - 32)$$

$$= \frac{5}{\cancel{9}} \times \cancel{90}^{10} = 50$$

(2) $F = -40$ என்றால்,

$$C = \frac{5}{9}(F-32)$$

$$= \frac{5}{9}(-40-32)$$

$$= \frac{5}{9} \times -72 = -40$$

பயிற்சி 9·23

பின் வரும் கணக்குகளில் கொடுத்துள்ள மதிப்புகளை மாறி அல்லது மாறிகளுக்குப் பிரதியீடு செய்து சார்பலனைக் கண்டு பிடிக்க :

(1) $A = 2\pi r$ $\quad r = 7,\ 3\frac{1}{2},\ 10.$

(2) $C = \dfrac{10S}{11}$ $\quad S = 22,\ 495,\ 396$

(3) $F = \dfrac{9}{5}(C+32)$ $\quad C = 20,\ -15,\ 0$

(4) $y = 2x^2 - 3x + 2$ $\quad x = 0,\ 1.$

(5) $V = u^2 + 16u + 7$ $\quad u = 0,\ -1.$

(6) $Z = y^3 - y^2 + y - 1$ $\quad y = 0,\ 1,\ 2.$

(2) பல்லுறுப்புக் கோவையினால் நிறுவப்பட்ட சார்பு ஒன்றின் சார்பலன் x-ன் சில மதிப்புகளுக்குப் பூச்சியமாக இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$y = 4x-3$ எனில், x-க்கு $\dfrac{3}{4}$ என்ற மதிப்பையிட y-க்கு மதிபபு பூச்சியம். $y = x^2 - 4x + 3$ எனில், x-க்கு 1 அல்லது 3 என்ற மதிப்புகளுக்கு இசைந்து y-ன் மதிப்பு பூச்சியமாகிறது. இத்தகைய x-ன் மதிப்புகளை அக் கோவைச் சார்பின் பூச்சியங்கள் என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^2 - 4$ வரையறுக்கும் சார்பின் பூச்சியங்கள் யாவை ?

x-க்கு 2 அல்லது -2 என்றிட்டால், சார்பலன் பூச்சியமாகிறது. எனவே, $x^2 - 4$-ன் பூச்சியங்கள் 2, -2.

பயிற்சி 9·24

பின் வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் வரையறுக்கும் சார்புகளின் பூச்சியங்களைக் கண்டுபிடி.

(i) $x - 3$ (ii) $3x - 9$ (iii) $2x - 1$

(iv) $x^2 - 9$ (v) $x^2 - 2$ (vi) $x^2 - 1$

§20. முற்றொருமைகள்

(1) பின்வரும் முற்றொருமைகளைப் பற்றி முன்னமேயே கற்றறிந்திருக்கிறீர்கள். இப்பொழுது அவற்றைப் பயன்படுத்திச் சில கணக்குகளைச் செய்வோம்.

(i) $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b) + ab$

(ii) $(a \pm b)^2 \equiv a^2 \pm 2ab + b^2$

(iii) $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$.

பயிற்சி 9:25

I. பெருக்கற்பலனைக் காண்க.

(1) $(x + 3)(x + 2)$ (2) $(x + 5)(x + 3)$

(3) $(x + 7)(x + 2)$ (4) $(x + 2)(x + 8)$

(5) $(x + 7)(x + 7)$ (6) $(x + 1)^2$

(7) $(2a - 3)^2$ (8) $(3p - 2q)^2$

(9) $(a + 5)(a - 5)$ (10) $(2x + 1)(2x - 1)$

II. சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக.

(1) $49 + 2 \times 7 \times 3 + 9$

(2) $225 + 2 \times 15 \times 5 + 25$

(3) $625 + 2 \times 25 \times 15 + 225$

(4) $169 - 2 \times 13 \times 3 + 9$

(5) $144 - 2 \times 12 \times 2 + 4$

(6) 98×102

(7) 1005×995

(8) 987×1013

(9) $545^2 - 455^2$

(10) $775^2 - 225^2$

(11) $(a + 2b)^2 - (a - 2b)^2$

(12) $(a + 3b)^2 + (3a + b)^2$

(13) $(2a + b)^2 + (a + 2b)^2 - (a - b)^2$

(14) $(a + b)^2 - (a + 2b)^2 + (a + 3b)(a - 3b)$

(15) $(a + 3b)^2 + (a - 2b)^2 - (5a - 3b)(5a + 3b)$

(16) $a + b = 7$, $ab = 12$ எனில் $a^2 + b^2$, $(a - b)^2$ இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(17) $a + \frac{1}{a} = k$ என்றால், $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2$, $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$ இவற்றை k மூலம் கண்டுபிடி.

(18) $(x - y) = 4$, $xy = 3$ எனில், $(x + y)^2$-ன் மதிப்பு என்ன ?

(19) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = k$ என்றால் $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2$-ன் மதிப்பென்ன ?

(20) $x - \frac{1}{x} = p$ என்றால் $x^2 + \frac{1}{x^2}$-ன் மதிப்பை p மூலம் கண்டுபிடி.

(2) $(a + b + c)^2$ என்னவென்று பார்ப்போம்.

பெருக்கல் முறை :

$(a + b + c)(a + b + c)$

$$\begin{array}{llllll} a^2 + ab + ac & & & & \\ \quad + ba & & + b^2 & + bc & \\ & + ca & & + cb & + c^2 \end{array}$$

$$a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

மற்றொரு முறை :

$a + b = k$ என்று கொள். இப்போது $(a + b + c)^2$ என்பது $(k + c)^2$-க்குச் சமமாகும். ஆகவே,

$$(k + c)^2 \equiv k^2 + 2kc + c^2$$

இங்கு $k = (a+b)$ என்று பிரதியிடு.

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$(x+y+2z)^2$ ஐ விரிவுபடுத்தி எழுது.

$$(x+y+2z)^2 = x^2 + y^2 + (2z)^2 + 2xy + 2y \times 2z + 2 \times 2z \times x$$
$$= x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz + 4zx$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$(x+y-z)^2 = x^2 + y^2 + (-z)^2 + 2x \times y + 2 \times y \times (-z) + 2x \times -z$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$(x-2y-3z)^2 = x^2 + (-2y)^2 + (-3z)^2 + 2 \times x \times (-2y) + 2 \times (-2y) \times (-3z) + 2 \times (-3z) \times x$$
$$= x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 12yz - 6xz$$

பயிற்சி 9·26

விரிவுபடுத்தி எழுது

(1) $(2x+y+z)^2$ (2) $(2x+3y+z)^2$

(3) $(x+2y+3z)^2$ (4) $(2x-y+z)^2$

(5) $(2x-y-z)^2$ (6) $(2x-3y+z)^2$

(7) $(3x-2y-z)^2$ (8) $(2x-2y+z)^2$

(9) $(x+3y-4z)^2$

சுருக்குக

(1) $(2x+3y+z)^2 + (x+2y-z)^2$

(2) $(2x+3y-4z)^2 - (2x-3y+4z)^2 + (2x-3y-4z)^2$

(3) (i) $(a+b)^3 \equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(ii) $(a-b)^3 \equiv a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(i)
$$\begin{aligned}(a+b)^3 &\equiv (a+b)(a+b)^2\\ &\equiv (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &\equiv a(a^2+2ab+b^2)\\ &\qquad + b(a^2+2ab+b^2)\\ &\equiv a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b\\ &\qquad + 2ab^2 + b^3\\ &\equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

இவ்வாறே $(a-b)^3$-ன் விரிவையும் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$a^3 + b^3 \equiv (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ என்று காட்டுக.

தீர்வு :
$$\begin{aligned}(a+b)^3 &\equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ &\equiv a^3 + 3ab(a+b) + b^3\end{aligned}$$

$\therefore\ (a+b)^3 - 3ab(a+b) \equiv a^3 + b^3.$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$a^3 - b^3 \equiv (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ என்று காட்டு.

தீர்வு :

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\\ &= a^3 - 3ab(a-b) - b^3\end{aligned}$$

$\therefore\ (a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3.$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$(2a+x)$-ன் கனம் என்ன ?

$$\begin{aligned}(2a+x)^3 &\equiv (2a)^3 + 3(2a)^2 \times x + 3 \times 2a \times x^2 + x^3\\ &\equiv 8a^3 + 12a^2x + 6ax^2 + x^3.\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$\left(x + \frac{1}{x}\right)$-ன் கனம் என்ன ?

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3 \times x^2 \times \frac{1}{x} + 3 \times x \times \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$= x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}.$$

அல்லது

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$(a+b) = 5$, $ab = 6$ என்றால், $a^3 + b^3$-ன் மதிப்பு என்ன ?

எடுத்துக்காட்டு, 1-ன் படி $a^3 + b^3 \equiv (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$$= 5^3 - 3 \times 6 \times 5$$

$$= 125 - 90$$

$$= 35$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$a - \frac{1}{a} = m$ என்றால், $a^3 - \frac{1}{a^3}$-ன் மதிப்பை m மூலம் கண்டுபிடி.

$$a^3 - \frac{1}{a^3} \equiv \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3 \times a \times \frac{1}{a}\left(a - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right)$$

$$= m^3 + 3m.$$

பயிற்சி 9·27

(1) பின் வருவனவற்றின் கனம் என்ன ?

(i) $(x+p)$ (ii) $(x-p)$ (iii) $\left(x+\frac{1}{p}\right)$

(iv) $(y+z)$ (v) $(y-z)$ (vi) $\left(2x+\frac{1}{q}\right)$

(vii) $(2x+3)$ (viii) $(2x-3)$ (ix) $\left(x+\frac{1}{x}\right)$

(x) $(2x+3p)$ (xi) $(2x-3p)$ (xii) $\left(y-\frac{1}{5}\right)$

(2) பின் வருவனவற்றில் முழுப்பெருக்கல் செய்யாமலேயே x^2, x இவற்றின் குணகத்தைக் கண்டுபிடி.

(a) $(2x + 3)^3$ (b) $(2x - 3)^3$ (c) $(3x + 1)^3$

(d) $(3x - 2)^3$

(3) $(a + b) = 7$, $ab = 12$ என்றால் $a^3 + b^3$-ன் மதிப்பு என்ன ?

(4) $(a - b) = 4$, $ab = 21$ என்றால் $a^3 - b^3$-ன் மதிப்பு என்ன ?

(5) $a + \frac{1}{a} = k$ என்றால், $a^3 + \frac{1}{a^3}$ -ன் மதிப்பை k மூலம் கூறு.

(6) $a - \frac{1}{a} = p$ என்றால், $a^3 - \frac{1}{a^3}$ -ன் மதிப்பை p மூலம் கூறு.

(7) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = q$ என்றால், $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}$ -ன் மதிப்பை q மூலம் கண்டுபிடி.

(8) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = r$ என்றால், $\frac{a^3}{b^3} - \frac{b^3}{a^3}$ -ன் மதிப்பை r மூலம் கண்டுபிடி.

(4) (i) $a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

(ii) $a^3 + b^3 \equiv (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

(i) $a^3 + b^3 \equiv (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ என்று எழுதலாம் என்று முன்பே பார்த்தோம்.

ஆகவே,

$$a^3 + b^3 \equiv (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$\equiv (a + b)^2 (a + b) - 3ab(a + b)$$

$$\equiv (a + b)(a + b)^2 - 3(a + b)(ab)$$

(பெருக்கல் மாற்று விதி)

$$\equiv (a + b)\{(a + b)^2 - 3ab\}$$ (பங்கீட்டு விதி)

$$\equiv (a + b)\{a^2 + 2ab + b^2 - 3ab\}$$ [$(a+b)^2$-ன் விரிவு]

$$\equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

இதேபோல,

$$
\begin{aligned}
a^3 - b^3 &\equiv (a-b)^3 + 3ab(a-b) \\
&\equiv (a-b)^2(a-b) + 3ab(a-b) \\
&\equiv [(a-b)^2 + 3ab](a-b) \\
&\equiv [(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)](a-b) \\
&\equiv (a^2 + ab + b^2)(a-b) \\
&\equiv (a-b)(a^2 + ab + b^2).
\end{aligned}
$$

குறிப்பு : $a^3 \pm b^3$ ஆனது $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ என்று அமைந்திருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$a^3 + 1$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

$$
\begin{aligned}
a^3 + 1 &= a^3 + 1^3 \\
&= (a+1)(a^2 - a.1 + 1) \\
&= (a+1)(a^2 - a + 1)
\end{aligned}
$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\dfrac{a^3}{b^3} - \dfrac{b^3}{a^3}$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right) \\
&= \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a^2}{b^2} + 1 + \frac{b^2}{a^2}\right)
\end{aligned}
$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$64x^3 + 125y^3$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

$$
\begin{aligned}
64x^3 + 125y^3 &= (4x)^3 + (5y)^3 \\
&= (4x + 5y)[(4x)^2 - 4x \times 5y + (5y)^2] \\
&= (4x + 5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2)
\end{aligned}
$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : விரிவுபடுத்து

$(4x + 3y)(16x^2 - 12xy + 9y^2)$

$$
\begin{aligned}
&(4x + 3y)[(4x)^2 - 4x \times 3y + (3y)^2] \\
&= (4x)^3 + (3y)^3 \\
&= 64x^3 + 27y^3
\end{aligned}
$$

பயிற்சி 9·28

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக

(1) $x^3 + y^3$ (2) $x^3 - y^3$

(3) $27 + x^3$ (4) $64 - y^3$

(5) $8x^3 + 125y^3$ (6) $27x^3 - 8y^3$

(7) $64x^3 + 1$ (8) $27y^3 - 1$

(9) $a^3b^3 + 1$ (10) $a^3b^3 - 27$

(11) $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}$ (12) $a^3 + \frac{1}{a^3}$

விரிவுபடுத்துக

(13) $(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$

(14) $(3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$

(15) $8x^3 + y^3 = k$; $2x + y = l$ என்றால், $(4x^2 - 2xy + y^2)$-ன் மதிப்பை k, l மூலம் கண்டுபிடி.

(16) $125x^3 - 8y^3 = p$. $5x - 2y = q$ என்றால், $(25x^2 + 10xy + 4y^2)$-ன் மதிப்பை p, q மூலம் கண்டுபிடி.

(5) $(x + a)(x + b)(x + c) \equiv x^3 + x^2(a + b + c) + x(ab + bc + ca) + abc$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

அல்லது $x^2 + ax + bx + ab$.

ஆகவே,
$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c) &= (x + a)(x + b)(x + c)\\
&= (x + c)(x + a)(x + b)\\
&= (x + c)(x^2 + ax + bx + ab)\\
&= x(x^2 + ax + bx + ab)\\
&\quad + c(x^2 + ax + bx + ab)\\
&= x^3 + ax^2 + bx^2 + abx\\
&\quad + cx^2 + cax + cbx + abc\\
&= x^3 + ax^2 + bx^2 + cx^2\\
&\quad + abx + bcx + cax + abc\\
&= x^3 + (ax^2 + bx^2 + cx^2)\\
&\quad + (abx + bcx + cax) + abc\\
&= x^3 + x^2(a + b + c)\\
&\quad + x(ab + bc + ca) + abc.\end{aligned}$$

இதேபோல் $(x-a)(x-b)(x-c)$

$$\equiv x^3 - x^2(a+b+c) + x(ab+bc+ba) - abc.$$

என்று காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$(x+3)(x+4)(x+5)$$

$$\equiv x^3 + (3+4+5)x^2 + (3\times 4 + 4\times 5 + 5\times 3)x + 3\times 4\times 5$$

$$\equiv x^3 + 12x^2 + 47x + 60.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$\equiv x^3 - (2+3+4)x^2 + (2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 2)x - 2\times 3\times 4$$

$$\equiv x^3 - 9x^2 + 26x - 24.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$(x+3)(x-2)(x-1)$$

$$\equiv x^3 + (3-2-1)x^2 + (3\times(-2) + (-2)\times(-1) + (-1)\times 3)x + 3\times -2\times -1$$

$$\equiv x^3 - 7x + 6,$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

பின்வரும் பெருக்கற்பலனில் x, x^2 இவற்றின் குணகங்களை முழுவதும் பெருக்காமலேயே கண்டுபிடி.

(1) $(x+4)(x+3)(x+1)$ (2) $(x-3)(x-2)(x-6)$

(1) x-ன் குணகம் $= 4\times 3 + 3\times 1 + 4\times 1$

$= 12 + 3 + 4$

$= 19.$

x^2-ன் குணகம் $= 4 + 3 + 1 = 8$

(2) x-ன் குணகம் $= +(3\times 2 + 2\times 6 + 6\times 3)$

$= 6 + 12 + 18$

$= 36$

x^2-ன் குணகம் $= -(3+2+6)$

$= -11.$

பயிற்சி 9·29

விரிவுபடுத்துக

(1) $(x+2)(x+4)(x+6)$

(2) $(x+1)(x+3)(x+5)$

(3) $(x-2)(x-4)(x-5)$

(4) $(x-1)(x-2)(x-4)$

(5) $(p-4)(p+7)(p+3)$

(6) $(y-3)(y+4)(y-3)$

(7) $(1-x)(2-x)(3-x)$

(8) $(x^2+1)(x^2+4)(x^2+7)$

(9) $(ab+1)(ab+2)(ab+3)$

(10) $(xy-2)(xy-3)(xy-4)$

(11) $(x+3)(x+2)(x+1) \equiv x^3+ax^2+bx+c$ என்றால், a, b, c-ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(12) $(2x-1)(2x-3)(2x-k) \equiv 8x^3-18x^2+bx+c$ என்றால், $k; b, c$ இவற்றின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(13) பின்வரும் கோவைகளின் பெருக்கற் பலனில் x^2, x இவற்றின் குணகங்களைக் கண்டுபிடி.

(a) $(x+5)(x+7)(x+9)$

(b) $(2x+3)(2x+5)(2x+1)$

(c) $(x-5)(x-3)(x-7)$

(d) $(2x-1)(2x-3)(2x-5)$

(14) $(a+b)(b+c)(c+a) \equiv (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$ என்று சாதாரணப் பெருக்கல் மூலம் நிரூபித்து, இந்த முற்றொருமையைச் சூத்திரமாக அறிந்துகொள்.

(6) மேலே படித்துள்ள முற்றொருமைகளனைத்தும் முழுக்களின் பண்புகளைக் கொண்டு நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளன. மேலும், இம் முழுக்களின் பண்புகள் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்குப் பொருந்துகின்றன என்று முன்பே படித்தோம். ஆகவே, மேற் கண்ட முற்றொருமைகளில் a, b, c என்ற மாறிகளுக்குப் பதில் அதற்கேற்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பிரதியீடு செய்தாலும், இம் முற்றொருமைகள் சரியானவைகளே என்று காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

சுருக்குக : $(2x + y)^2 - (x + 2y)^2$

தீர்வு :

$2x + y \equiv a, \quad x + 2y \equiv b$ என்க.

$$= (2x + y)^2 - (x + 2y)^2$$
$$= a^2 - b^2$$
$$= (a + b)(a - b)$$
$$= [(2x + y) + (x + 2y)][2x + y) - (x + 2y)]$$
$$= (3x + 3y)(x - y)$$
$$= 3(x + y)(x - y)$$
$$= 3(x^2 - y^2).$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

சுருக்குக : $(2a + b)^2 + (3b - 2a)^2 + 2(2a + b)(3b - 2a)$

தீர்வு :

$2a + b \equiv x, \quad 3b - 2a \equiv y$ என்க.

கொடுத்துள்ள கோவை

$$= x^2 + y^2 + 2xy$$
$$= (x + y)^2$$
$$= (2a + b + 3b - 2a)^2$$
$$= (4b)^2$$
$$= 16b^2.$$

பயிற்சி 9·30

(1) $a = x + y$, $b = x - y$ என்றால் $(a + b)^2$-ன் மதிப்பு என்ன ?

(2) $a = x + y$; $b = y + z$ என்றால் $a^3 + b^3$ ஐ x, y, z-ன் மூலம் கண்டுபிடி.

(3) $a = x - y$, $b = x + y$ எனில் $a^3 - b^3$-ன் மதிப்பை x, y-ன் மூலம் கண்டுபிடி.

(4) $a = x + y$, $b = x - y$ என்றால் $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$ இவற்றின் மதிப்பை x, y-ன் மூலம் காண்.

(7) $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$-ன் ஒரு பயன்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\frac{5}{\sqrt{3}+1}$ என்ற பின்னத்தின் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றி, பின்னத்தை அதன் சமான பின்னமாக எழுது.

$$\frac{5}{\sqrt{3}+1} = \frac{5}{\sqrt{3}+1} \times 1$$

$$= \frac{5}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{5(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{5(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}$$

$$= \frac{5(\sqrt{3}-1)}{3-1}$$

$$= \frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$= \frac{4}{\sqrt{5}-1}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{5}-1} \times 1$$

$$= \frac{4}{\sqrt{5}-1} \times \frac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-(1)^2}$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1}$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}+1)}{4}$$

$$= \sqrt{5}+1$$

பயிற்சி 9·31

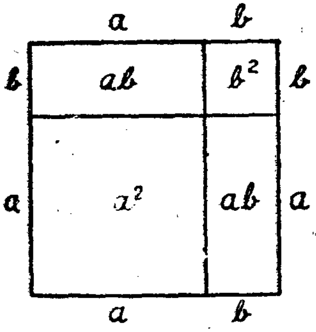
பின்வரும் பின்னங்களின் பகுதிகளை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றிப் பின்னத்தைத் திருப்பி எழுது :

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ (3) $\frac{3}{\sqrt{3}+2}$

(4) $\frac{5}{\sqrt{3}-2}$ (5) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (6) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(7) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (8) $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(8) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ என்ற முற்றொருமையைப் பக்கத்திலுள்ள படம் விளக்குகிறது. $(a + b)$ அலகுகள் பக்க அளவுகள் கொண்ட சதுரத்தின் பரப்பளவை, படத்தில் காட்டியபடி இரு சதுரங்கள், இரு செவ்வகங்கள் ஆகியவற்றின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத் தொகையாகப் பெறமுடிகிறதல்லவா ? சதுரங்களின் பரப்பளவுகள் முறையே a^2, b^2. இரு செவ்வகங்களின் மொத்தப் பரப்பளவு $ab + ab = 2ab$.



படம் 9-1.

எனவே $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ என்ற முற்றொருமையை விளக்க, கன சதுரம் ஒன்று தேவை. இதனை எவ்விதம் வெட்டி, பாகங்களின் கன அளவுகளைக் கணித்து முற்றொருமையைச் சரிபார்ப்பது என்பதைப் பரிசோதனைச் சாலையில் அறிக.

§21. காரணிப் படுத்தல்

(1) எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^2 + 5x + 6$ ஐக் காரணிப்படுத்தி எழுது.

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ என்ற முற்றொருமையில் x-ன் குணகம் $(a + b)$ ஆகும். நிலையெண் அல்லது மாறிலியுறுப்பு $a \times b$ ஆகும்.

இங்குக் கொடுத்துள்ள மூவுறுப்புக் கோவையில் x-ன் குணகம் 5. நிலையெண் 6. ஆகவே காரணி $(x+a)\,(x+b)$ எனில், $a+b=5$, $ab=6$. ஆனால் $2+3=5$ என்றும், $2\times 3=6$ என்றும் கிடைப்பதால், $a=2$ என்றும், $b=3$ என்றும் கொண்டு x^2+5x+6 என்பதை $(x+2)\,(x+3)$ என்று காரணிப் படுத்தலாம்.

எந்த இரு எண்களின் கூட்டல், நடு உறுப்பின் குணகத்தையும், அதே இரு எண்களின் பெருக்கம், மாறிலி உறுப்பையும் கொடுக்கும் என்று கண்டு பிடிப்பதே இவ்வாறான கோவைகளின் காரணிப்படுத்தலுக்கு அடிப்படை விதியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

காரணிப்படுத்துக :

$x^2-7x+12.$

$x^2-7x+12=(x+a)\,(x+b)$ எனில் $a+b=-7$ எனவும், $ab=12$ எனவும் கிடைக்கிறது. ஆகவே $a=-3$ $b=-4$.

$\therefore\quad x^2-7x+12=(x-3)\,(x-4).$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

காரணிப்படுத்துக :

$x^2+8x-48$

இங்கு, $a+b=8 \quad ab=-48$

எனவே, $a=12, \quad b=-4$

ஆகவே, $x^2+8x-48=(x+12)\,(x-4)$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

காரணிப்படுத்துக :

$x^2-8x-48$

இங்கு, $a+b=-8 \quad ab=-48$

எனவே, $a=-12 \quad b=4$

ஆகவே, $x^2-8x-48=(x-12)\,(x+4).$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

காரணிப்படுத்துக :

$$4a^2 + 4a + 1$$

$$4a^2 + 4a + 1$$
$$= (2a)^2 + 2(2a) \times 1 + (1)^2$$
$$= (2a + 1)^2$$

அல்லது $(2a + 1)(2a + 1)$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

காரணிப்படுத்துக :

$$25a^2 - 16b^2$$

$$(5a)^2 - (4b)^2$$
$$= (5a + 4b)(5a - 4b)$$

பயிற்சி 9·32

காரணிப்படுத்துக :

(1) $x^2 + 7x + 12$
(2) $x^2 + 9x + 20$
(3) $x^2 + 22x + 120$
(4) $x^2 + 18x + 65$
(5) $x^2 - 8x + 12$
(6) $x^2 - 12x + 20$
(7) $x^2 - 23x + 120$
(8) $x^2 - 19x + 70$
(9) $x^2 + 7x - 30$
(10) $x^2 - 7x - 30$
(11) $x^2 + 8x - 65$
(12) $x^2 - 8x - 65$
(13) $x^2 + x - 42$
(14) $x^2 - x - 42$
(15) $x^2 + 2x - 35$
(16) $x^2 - 2x - 35$
(17) $a^2 + 4ab + 4b^2$
(18) $4a^2 + 4ab + b^2$
(19) $4a^4 + 4a^2b^2 + b^4$
(20) $64a^4 + 80a^2b^2 + 25b^4$
(21) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$
(22) $36a^4 - 12a^2b + b^2$
(23) $49a^4 - 56a^2b^2 + 16b^4$
(24) $9a^2 - 4ab^2 + 64b^4$
(25) $(a - 2b)^2 - (a + 2b)^2$

(26) $(a + 2b + 3c)^2 - (a + b)^2$

(27) $(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2$

(28) $a^4 - 1$

(29) $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab$

(30) $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 + 2ab + 2ac + 2ca$

(2) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ ஐப் பயன்படுத்தி சில கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$8a^3 + b^3$ ஐக் காரணிப்படுத்தி எழுதுக.

$$8a^3 + b^3 = (2a)^3 + b^3 = (2a + b)[(2a)^2 - 2a \times b + b^2]$$
$$= (2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$8a^3 - 1$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

$$8a^3 - 1 = (2a)^3 - 1^3$$
$$= (2a - 1)[(2a)^2 + 2a \times 1 + 1^2]$$
$$= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$$

பயிற்சி 9·32 (i)

பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தி எழுது :

(1) $a^3 + y^3$ (2) $x^3 - a^3$ (3) $8x^3 + y^3$

(4) $x^3 - 8y^3$ (5) $64a^3 + 27b^3$ (6) $a^3 + 1$

(7) $x^3 - 8$ (8) $8x^3 + 27$ (9) $a^6 + 1$

(10) $a^6 - 1$.

§22. மீப்பெரு பொது வகு கோவை

இரு கோவைகள் தரப்பட்டிருந்தால் இரண்டையும் காரணிப் படுத்திய வடிவில் எழுதிக்கொள்ளலாம். இரண்டுக்கும் பொதுக் காரணிகளில் மீப்பெரு படிகொண்ட கோவையை அவற்றின் மீப்பெரு பொது வகு கோவை (G.C.D) என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

x^3, x^4 இதன் மீ. பொ. வ. என்ன ?

x^3-ன் வகு கோவைகள் $1, x, x^2, x^3$

x^4-ன் ,, ,, $1, x, x^2, x^3, x^4$

$\therefore$ மீ. பொ. வ. $= x^3$.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$16x^2 y^5$; $24x^3 y^2$ இவற்றின் மீ. பொ. வ. என்ன ?

16, 24-ன் மீ. பொ. வ. 4

x^2, x^3 $\qquad$ x^2

y^5, y^2 $\qquad$,, , y^2

எனவே மீ. பொ. வ. $= 4x^2 y^2$

முதலில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் காரணிகளைக் கண்டு பிடிக்க வேண்டும். பின்னர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பொதுக் காரணிகளைக் கண்டுபிடித்து, அவற்றிலே மிகப்பெரிய படியுள்ள காரணியை மீ. பொ. வ. ஆகக் கொள்ள வேண்டும்

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$(x + 1)(x + 2)(x + 3)$, $(x + 1)(x + 4)(x + 2)$ இவற்றின் மீ. பொ. வ. என்ன ?

பொதுக் காரணிகள் $(x + 1)$, $(x + 2)$, $(x + 1)(x + 2)$.

ஆகவே, மீ. பொ. வ. $(x + 1)(x + 2)$ ஆகும்.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து நாம் அறிபவை :

(1) மீ. பொ. வ. மற்ற பொதுக்காரணிகளால் வகுபடும்.

(2) கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோவைகளின் பகாக்காரணிகளைத் (irreducible factors or prime factors) தனித்தனியாகக் கண்டுபிடித்தால் இவ்விரு கோவைகளுக்கும் பொதுவான பகாக் காரணிகளின் பெருக்கற்பலனே மீ. பொ. வ. ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$(x^3 + 1)$, $(x^2 + 2x + 1)$ இவற்றின் மீ. பொ. வ. ஐக் கண்டுபிடி.

முதல் கோவை $= x^3 + 1$

$= (x + 1)(x^2 - x + 1)$

இரண்டாம் கோவை $= (x^2 + 2x + 1)$

$= (x + 1)(x + 1)$

பொதுவான காரணி $= (x + 1)$

$\therefore$ மீ. பொ. வ. $(x + 1)$

[குறிப்பு : இரு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பல்லுறுப்புச் கோவைகளில் பொது வகு கோவை 'a' என்ற ஒரே ஒரு எண்

கோவையானல், அதன் மீ. பொ. வ. a ஆகும். எடுத்துக் காட்டாக, $4(x+2)(x+1)$, $6(x+6)(x+5)$ என்ற கோவைகளின் மீ. பொ. வ. 2 ஆகும்.]

பயிற்சி 9·33

பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தி மீ. பொ. வ. கண்டுபிடி :

(1) $ax - bx$, $a^2 - b^2$

(2) $a^3x^3 + a^3$, $x^3 + 1$

(3) $a^2b^2 - a^2c^2$, $ab - ac$

(4) $(x+1)(x-2)(x-3)$, $(x+1)(x+4)(x-3)$

(5) $x^4 - 1$, $5x^4 - 3x^2 + 2$

(6) $(a+1)^3$, $a^2 + 3a + 2$

(7) $(a-1)^3$, $a^2 - 1$,

(8) $(x-y)^2$, $x^3 - y^3$.

§23. மீச்சிறு பொது மடங்கு

P, Q என்ற இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் தரபட்டிருந்தால், அவையிரண்டாலும் (மீதியின்றி) வகுபடும் கோவைகளில் மீச்சிறு படியுடைய கோவை P, Q-ன் மீச்சிறு பொது மடங்கு (மீ. பொ. ம.) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$4x^2y$, $2xy$ இவற்றின் மீ. பொ. ம. கண்டுபிடி.

$$4x^2y = 4 \times x^2 \times y$$

$$2xy = 2 \times x \times y$$

இங்கு எண் காரணிகளின் மீ. பொ. ம. 4. x, y உறுப்புகளின் மீ. பொ. ம. x^2y.

ஆகவே, $4x^2y$, $2xy$ இவற்றின் மீ. பொ. ம. $4x^2y$.

பயிற்சி 9·34

கீழ்க்கண்டவற்றின் மீ. பொ. ம. கண்டுபிடி:

(1) ab, ac, bc (2) a^2b, ab^2, a^2c^2

(3) $4x^2y, 6xy^3, 8yz^3$ (4) pqx, pqr, qry

(5) $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)(a-b)$.

(6) $(a-b)^2$, $(a-b)^3$, $(a+b)(a-b)$

(7) $(x+1)(x+2)$, $(x+2)(x+3)$, $(x+3)(x+1)$

(8) $(x-1)(x+2)$, $(x-1)(x+1)$, $(x+2)(x-2)$

காரணிப் படுத்தி மீ. பொ. ம. கண்டுபிடித்தல்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

x^2+5x+6. x^2+5x+4 இவற்றின் மீ. பொ. ம. கண்டுபிடி.

$$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$$

$$x^2+5x+4=(x+4)(x+1)$$

x^2+5x+6, x^2+5x+4 இவற்றின் மீ. பொ. ம. $(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

(a^3+b^3), (a^2-b^2) இவற்றின் மீ. பொ. ம. கண்டுபிடி.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

ஆகவே, மீ. பொ. ம. $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)$.

பயிற்சி 9·35

பின் வருவனவற்றின் மீ. பொ. வ., மீ. பொ. ம. இவற்றைக் கண்டுபிடி :

(1) $(x+y)$, (x^3+y^3)

(2) (x^2-y^2), $4(x-y)$

(3) $3(a-b)(b-c)$, $4(b-c)(c-a)$

(4) x^3+8, $(x+2)^3$

(5) $(x^2+8x+12)$, x^2-4

(6) ab, bc (7) x^2yz, xy^2z

(8) $(a-b)$, $(b-c)$

(9) $x^2-7x-60$, $x^2-6x-72$

§24. வர்க்க மூலம்

வர்க்க எண்களின் வர்க்க மூலம் கண்டுபிடிப்பது போலவே பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கும் வர்க்க மூலம் கண்டுபிடிக்கலாம். முதலில் ஒருறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்க மூலங்களைக் கண்டு பிடிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$64x^4$-ன் வர்க்க மூலம் என்ன.

$$64x^4 = 8^2 (x^2)^2$$

ஆகவே, $\sqrt{64x^4} = 8x^2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$625x^4 y^2$-ன் வர்க்க மூலம் என்ன ?

$$625x^4 y^2 = 25^2 (x^2)^2 y^2$$

ஆகவே, $\sqrt{625x^4 y^2} = 25x^2 y$.

பயிற்சி 9·36

கீழ்வரும் ஒருறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்க மூலங்களைக் கண்டுபிடி :

(1) $4x^2$ (2) $9x^2 y^2$ (3) $144x^4 y^4 z^4$

(4) $225x^2 y^4 z^2$ (5) $(a+b)^2$ (6) $(a-b)^2$

(7) $(a+b)^2 (a-b)^2$ (8) $(a^2-b^2)^2 (a^2+b^2)^2$

முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி வர்க்கமூலம் காணல்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^4 + 2x^2 y + y^2$-ன் வர்க்க மூலம் என்ன ?

$$x^4 + 2x^2 y + y^2 = (x^2 + y)^2$$

ஆகவே $x^4 + 2x^2 y + y^2$-ன் வர்க்க மூலம் $(x^2 + y)$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^2 - 2x(y+z) b + (y+z)^2$-ன் வர்க்க மூலம் என்ன ?

$$x^2 - 2x(y+z) + (y+z)^2 = [x-(y+z)]^2$$
$$= (x-y-z)^2$$

ஆகவே, இதன் வர்க்கமூலம் $(x - y - z)$ ஆகும்.

பயிற்சி 9·37

பின்வருவனவற்றின் வர்க்க மூலங்களைக் கண்டுபிடி:

(1) $a^2 + 4a + 4$ (2) $a^2 - 4a + 4$

(3) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

(4) $a^4 + 8a^2 + 16$ (5) $(a + b)^2 - 4ab$

(6) $(a - b)^2 + 4ab$ (7) $(2a + b)^2 - 8ab$.

காரணிப்படுத்தி வர்க்கமூலம் காணல்:

கொடுத்துள்ள கோவையை முதலில் காரணிப்படுத்திய பிறகு ஒரே காரணி இருமுறை பெருக்கற்பலனாக வந்தால், அவற்றில் ஒன்றை வர்க்க மூலத்தின் காரணியாகக் கொள்ளல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$(x^2 + 5x + 6) \times (x^2 + 4x + 3) \times (x^2 + 3x + 2)$-ன் வர்க்க மூலம் என்ன?

$$(x^2 + 5x + 6) = (x + 3)(x + 2)$$
$$(x^2 + 4x + 3) = (x + 3)(x + 1)$$
$$(x^2 + 3x + 2) = (x + 2)(x + 1)$$

ஆகவே, $(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 3x + 2)$

$$= (x + 3)(x + 2)(x + 3)(x + 1)(x + 2)(x + 1)$$
$$= (x + 3)(x + 3)(x + 2)(x + 2)(x + 1)(x + 1)$$

ஆகவே, இதன் வர்க்கமூலம் $(x + 3)(x + 2)(x + 1)$

அல்லது $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

பயிற்சி 9·38

பின்வரும் கோவைகளின் பெருக்கற்பலனின் வர்க்க மூலத்தைக் கண்டுபிடி:

(1) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 3x + 2)$

(2) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 2x - 3)(x^2 - x - 1)$

(3) $(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 2x - 3)$

(4) $(x^3 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x + 2)$

(5) $(x^3 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 2)(x + 2)$

வகுத்தல் முறையில் வர்க்கமூலம் காணல்

வகுத்தல் முறையில் வர்க்கமூலம் காண பல்லுறுப்புக் கோவையை முதலில் படிகளின் இறங்கு வரிசையில் (அல்லது ஏறு வரிசையில்) எழுது. கோவையின் முதல் உறுப்பின் வர்க்க மூலத்தை எழுதிக் கொண்டு பிறகு அடுத்த இரு உறுப்புகளை அதன் கீழ் எழுதிக் கொண்டு அதற்கான வர்க்கமூலத்தின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$-ன் வர்க்கமூலம் என்ன ?

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x^2 \qquad + x \qquad + 1 \\
\hline
2x^2 & 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 \\
 & 4x^4 \\
\cline{2-2}
4x^2 + x & \qquad 4x^3 + 5x^2 \\
 & \qquad 4x^3 + x^2 \\
\cline{2-2}
4x^2 + 2x + 1 & \qquad\qquad 4x^2 + 2x + 1 \\
 & \qquad\qquad 4x^2 + 2x + 1 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0 \\
\end{array}
$$

(1) முதலில் $4x^4$-ன் வர்க்கமூலம் $2x^2$, வர்க்கமூலத்தின் முதல் உறுப்பாகும். இதைக் கொடுத்துள்ள கோவையின் மேற்புறத்தில் வரைந்துள்ள கோட்டின் மேலும், இடப்புறமும் எழுதிக் கொண்டு $2x^2 \times 2x^2 = 4x^4$ என்பதை பல்லுறுப்புக் கோவையின் $4x^4$ என்ற உறுப்பினடியில் எழுதிக் கொள்ள வேண்டும்.

(2) அடுத்த இரண்டு உறுப்புகளை $4x^4$ எழுதிய வரிசைக்கு அடுத்த வரிசையில் எழுதிக்கொள்ள வேண்டும். $2x^2 \times 2 = 4x^2$ என்று கிடைக்கும். இதை $2x^2$ என்று இடப் புறம் எழுதியுள்ள உறுப்பின் கீழ் எழுதிக்கொள்ள வேண்டும்.

(3) இப்போது $4x^3$ ஐ $4x^2$-ல் வகுக்க x என்ற விடை கிடைக்கிறது. இதுவே வர்க்கமூலத்தின் இரண்டாவது உறுப்பாகும். இதை $2x^2$-க்குப் பக்கத்தில் $2x^2 + x$ என்றும்,

இடப்புறம் எழுதியுள்ள $4x^2$-ன் பக்கத்தில் $4x^2 + x$ என்றும் எழுதிக்கொள்.

(4) இப்போது $4x^2 + x$ ஐ வர்க்கமூலத்தின் இரண்டாவது உறுப்பான x ஆல் பெருக்கி அதை $4x^3 + 5x^2$-ன் அடியில் எழுதிக் கழி.

(5) இப்போது $4x^3 + 5x^2$ இலிருந்து $4x^3 + x^2$ ஐக் கழிக்க $4x^2$ என்ற மீதி கிடைக்கிறது. இந்த $4x^2$ என்ற உறுப்பின் பக்கத்தில் கோவையில் அடுத்த இரு உறுப்புகளான $2x + 1$ ஐ எழுதிக்கொள்ள $4x^2 + 2x + 1$ என்ற கோவை கிடைக்கிறது.

(6) முன்பு செய்தது போலவே $2x^2 + x$ ஐ இரு மடங்காக்கி இடப்புறம் $4x^2 + 2x$ என்று எழுதிக்கொள். இப்பொழுது இடப்புறம் உள்ள $4x^2$ என்ற உறுப்பால் கடைசியாக எழுதிய கோவையின் முதலுறுப்பான $4x^2$ ஐ வகுக்க, 1 என்ற ஈவு (இறுதியானதும் கூட) உறுப்பாகும். [எண்களின் வர்க்கமூல வழியிலிருந்து இது எவ்வாறு வேறுபடுகிறது? ஏன்?]

(7) இப்பொழுது இதை $2x^2 + x$-ன் பக்கத்தில் $2x^2 + x + 1$ என்றும், $4x^2 + 2x$ என்பதை $4x^2 + 2x + 1$ என்றும் எழுதிக் கொண்டு $4x^2 + 2x + 1$ ஐ 1 ஆல் பெருக்கி, கடைசியில் கிடைத்துள்ள கோவையின் அடியில் எழுதிக் கொள்ள மீதி பூச்சியம் என்று கிடைக்கிறது. ஆகவே, $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$-ன் வர்க்கமூலம் $2x^2 + x + 1$ ஆகும்.

இதுவே வகுத்தல் முறையில் வர்க்கமூலம் கண்டுபிடிக்கும் வழியாகும்.

ஒவ்வொரு முறையும் வர்க்கமூலத்தின் முன்னுறுப்புகளை இருமடங்காக்கி இடப்புறம் எழுதுவது ஏன்?

[$(a + b)^2$ அல்லது $(a + b)(a + b)$ என்பதன் பெருக்கற்பலன் $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ என்பதைக் கவனிக்க. $a^2 + 2ab + b^2$-ன் வர்க்கமூலம் $a + b$ ஆகும். $(2a + b)b = 2ab + b^2$ இவை $a^2 + 2ab + b^2$ என்ற கோவையின் இரண்டாவது, மூன்றாவது உறுப்புகள் ஆகும்.]

பயிற்சி 9·39

கீழ்வரும் கோவைகளின் வர்க்க மூலத்தை வகுத்தல் முறையில் கண்டுபிடி :

(1) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

(2) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

(3) $4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 6x + 9$

(4) $x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$

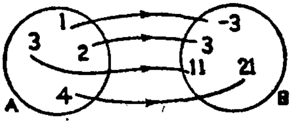
(5) $4x^4 - 4x^3y + 13x^2y^2 - 6xy^3 + 9y^4$

(6) $9x^4 - 12x^3 - 2x^2 + 4x + 1$

(7) $4x^4 - 8x^3 + 4x + 1.$

§25. பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் பல்லுறுப்புச் சார்புகளும்

முதல் அத்தியாயத்தில், சார்புகளைப் பற்றிப் படித்தோம். A, B என்பன இரு கணங்கள், A யிலிருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் B யிலிருந்து ஒரே ஓர் உறுப்பைப் பொருத்தும் விதியே சார்பு எனப்படும். இவ்விதப் பொருத்தம் செய்யும் விதியை, ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மூலம் எளிதில் கூறிவிடலாம். எடுத்துக் காட்டாக, படம் 9-2-ல் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் சார்பு



படம் 9-2.

"$x \in A$ ஆனல், x-ன் பிம்பம் $x^2 + 3x - 7$"

என்ற விதிமூலம் சுருக்கமாகக் கூறலாம் அல்லவா? இதன்படி $f(3) = 3^2 + 3 \times 3 - 7 = 11$.

இவ்வாறே, இரு மாறிகளில் அமைந்துள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையும் ஒரு சார்பினை வரையறுக்கப் பயன்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக :

$A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 5\}$, $P = xy + x - y$ என்க.

$x = 1$, $y = 3$ எனில் $P = 1$

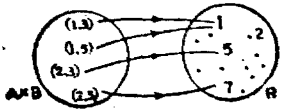
$x = 1$, $y = 5$ எனில் $P = 1$

$x = 2$, $y = 3$ எனில் $P = 5$

$x = 2$, $y = 5$ எனில் $P = 7$

இவ்வாறு P-ன் உதவியால், $A \times B$-க்கும் R-க்கும் இடையே ஒரு பொருத்தம் ஏற்படுகிறது. இது ஒரு சார்பு என்பதை அடுத்த பக்கத்திலுள்ள படம் விளக்குகிறது (படம் 9-3).

இத்தகைய சார்பலன்களை $f(x, y)$ என்று எழுதுவோம். இம் மாதிரியே, x, y, z என்ற மூன்று மாறிகளைப் பயன்படுத்திய சார்பலன்களை $f(x, y, z)$ என்று எழுதுவோம். அடியிலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில், $x, y, z \in R$ என்று கொள்க.



படம் 9-3.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$f(x) = 2x^2 + x - 5$; $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$ இவற்றைக் கண்டுபிடி.

$$f(1) = 2 \times 1^2 + 1 - 5$$
$$= 2 + 1 - 5 = -2$$
$$f(-1) = 2 \times (-1)^2 + (-1) - 5$$
$$= 2 - 1 - 5 = -4$$
$$f(0) = 2 \times 0^2 + 0 - 5$$
$$= 0 + 0 - 5 = -5.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy + 3$ என்றால் $f(-1, -1)$, $f(0, 1)$ இவற்றின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy + 3$$

(i) $f(-1, -1) = (-1)^3 + (-1)^3 - 2 \times (-1)(-1) + 3$
$$= -1 - 1 - 2 + 3$$
$$= -1$$

(ii) $f(0, 1) = 0^3 + (+1)^3 - 2 \times 0 \times 1 +$
$$= 0 + 1 - 0 + 3$$
$$= 4.$$

பயிற்சி 9·40

(1) $f(x) = -2x$ எனில் $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(-2)$, $f(+2)$ இவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(2) $f(x) = x^3$ எனில் $f(1)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(\frac{1}{2})$ இவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(3) $f(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ எனில் $f(15)$, $f(100)$ இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(4) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ எனில் $f(1, -1)$, $f(2, 2)$, $f(-2, -2)$ இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(5) $f(x, y) = 16x^2 + xy$ எனில், $f(1, 1)$, $f(2, 1)$ இவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(6) $f(r, h) = 2\pi r(r+h)$ எனில், $f(1, 1)$, $f(7, 7)$, $f(3\frac{1}{2}, 7)$ இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(7) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ எனில், $f(1, 1, 1)$, $f(2, -1, -1)$ இவற்றைக் கணக்கிடுக.

(8) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ என்றால், $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ஐக் கண்டுபிடி.

(9) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ என்றால், $f\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ ஐக் கண்டுபிடி.

(10) $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ என்றால், $f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$ ஐக் கண்டுபிடி.

(ii) இப்பொழுது ஒரு மாறியுள்ள சார்புகளின் பொது வடிவங்களைப் பார்ப்போம்.

	படி	பொது வடிவம்	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
(1)	1	$ax + b$	2
(2)	2	$ax^2 + bx + c$	3
(3)	3	$ax^3 + bx^2 + cx + d$	4

(ii) இரு மாறிகளுள்ள சார்புகளின் பொது வடிவங்கள்

	படி	பொது வடிவம்	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
(1)	1	$ax + by + c$	3
(2)	2	$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$	6
(3)	3	$ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + exy + fx^2 + gy^2 + hx + ky + l$	10

(iii) மூன்று மாறிகளுள்ள சார்புகளின் பொது வடிவங்கள்

	படி	பொது வடிவம்	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
(1)	1	$ax + by + cz + d$	4
(2)	2	$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx + gx + hy + kz + l$	10

§26. ஒருபடித்தான பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

கீழே கொடுத்துள்ள கோவைகளின் உறுப்புகளின் படிகள் எவ்வாறு உள்ளன ?

(1) $4x^3 - 7x^2 + 6x + 5$

(2) $8x^3 + 6x^2y + 7xy^2 + y^3$

(3) $4x^3y^3 - 3x^2y + 3xy - 4$

முதல் கோவையில், மாறிகளின் படிகள், ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் வேறு வேறாக உள்ளன.

இரண்டாவது கோவையில், இரு மாறிகள் உள்ளன. இவ்விரு மாறிகளின் படிகளின் மொத்தம், ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் 3.

மூன்றாவது கோவையிலும், இரு மாறிகள் இருப்பினும், அவற்றின் படிகளின் மொத்தம் ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் ஒரே மதிப்புள்ளதாக இல்லை.

இம் மூன்று பல்லுறுப்புக் கோவைகளில், இரண்டாவது பல்லுறுப்புக் கோவையில் படிகள், எல்லா உறுப்புகளிலும் சமமாக இருப்பதால் இக் கோவையை ஒருபடிக் கோவை என்று கூறுகிறோம். இவ்வாறாக, ஒரு கோவை ஒருபடித்தாக இருப்பதற்கு, அக் கோவையில், இரு மாறிகளாவது இருக்க வேண்டும்.

x, y என்பன இரு மாறிகள் என்க. இவற்றில் ஒருபடித்தான ஒருபடிக் கோவை $2x + y$ அல்லது $3x - y$ முதலிய ஈருறுப்புக் கோவைகள். இவற்றின் பொது வடிவம் $ax + by$.

ஒருபடித்தான இருபடிக் கோவைகள், $x^2 + y^2$, $2x^2 + 3xy$, $x^2 - y^2 + xy$ போன்ற கோவைகளாகும். இவற்றிற்குப் பொது வடிவம் $ax^2 + bxy + cy^2$.

இப்பொழுது ஒருபடித்தான கோவைகளின் பொது வடிவங்களைப் பார்ப்போம்.

மாறிகள்	படி	பொது வடிவம்
x, y	1	$ax + by$
x, y	2	$ax^2 + bxy + cy^2$
x, y	3	$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$
x, y	4	$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$
x, y, z	1	$ax + by + cz$
x, y, z	2	$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx$
x, y, z	3	$ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + ey^2z + fz^2x + gxy^2 + hyz^2 + kzx^2 + lxyz$

பயிற்சி 9·41

அடியிற் கண்ட கோவைகளில் எவை ஒருபடித்தானவை என்று காரணங் காட்டிக் கூறுக. ஒருபடித்தான கோவைகளின் படியைக் காண்க :

(1) $2x - y$ (2) $\sqrt{3}\,x - 8y + 4$

(3) $\sqrt{5}\,x - \dfrac{y}{\sqrt{8}}$ (4) $x^2 + 2y^2 - \sqrt{7}\,xy$

(5) $(x + y)^2 - 3xy$ (6) $(x + 2)^2$

(7) $3x + 5$

(8) $2x^2 + 3y^2 - zx + z^2 - 8xy$

(9) $xz^2 - z^3 + zy^2 + y^3$ (10) $9x^4 - 8y^4 - 3x^3y$

§27. சமச்சீர்க் கோவை

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோவைகள் x, y என்ற மாறிகளால் அமையப் பெற்றவை. இவற்றில் மாறிகளான x, y யை முறையே y, x என மாற்றியமைத்துக் கொடுத்துள்ள கோவை மாறுகிறதாவென்று பார்.

கொடுத்துள்ள கோவை	x, y ஐ y, x ஆக மாற்றியமைத்த கோவை	முடிவு
(1) $x^2 + y^2 - 5xy$	$y^2 + x^2 - 5yx$	மாறவில்லை
(2) $2x^2 - y^2 + 4xy$	$2y^2 - x^2 + 4yx$	மாறுகிறது
(3) $2x^2 + 2y^2 - 7xy$	$2y^2 + 2x^2 - 7yx$	மாறவில்லை
(4) $x^2 - y^2 - xy$	$y^2 - x^2 - yx$	மாறுகிறது
(5) $x - y + 1$	$y - x + 1$	மாறுகிறது
(6) $-3x^2 - 3y^2 + 1$	$-3y^2 - 3x^2 + 1$	மாறவில்லை

இங்கு 1, 3, 6 இக் கோவைகளில் x, y-க்குப் பதிலாக முறையே y, x என்று மாற்றி எழுதினாலும் கோவை மாறவில்லை. கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளில் இரு மாறிகள் உள்ளன. அவற்றை ஒன்றுக்கொன்று மாற்றி எழுதினாலும் அக் கோவைகள் மாறவில்லை. இத்தகைய கோவைகள் 'சமச்சீர்க் கோவைகள்' எனப்படும். மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளில் உள்ள 1, 3, 6 கோவைகள் x, y-ல் சமச்சீர்மை (Symmetry) பெற்றுள்ளன என்று கூறுகிறோம்.

இரு மாறிகளுள்ள கோவைகளுக்குப் பதிலாக, மூன்று மாறிகளுள்ள கோவைகளை எழுதிக் கொண்டும், அவற்றில் சமச்சீர்மை உள்ளனவா வென்றும் பார்க்கலாம். இப்பொழுது இக் கோவைகளின் மூன்று மாறிகளையும், இரண்டிரண்டாக எடுத்துக் கொண்டு, இவற்றிற்குள் சமச்சீர்மை உள்ளனவா என்று பார்க்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6xyz$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் முதலில் x, y இம் மாறிகளை ஒன்றுக்குப் பதிலாக மற்றொன்றை மாற்றியெழுத $3y^2 + 3x^2 + 3z^2 - 6yxz$ என்ற கோவை கிடைக்கிறது. y, z இவற்றை ஒன்றுக்குப்பதிலாக மற்றொன்றாக மாற்றியெழுத,

$3x^2 + 3z^2 + 3y^2 - 6xzy$ என்ற கோவையும்,

x, z இவற்றை மாற்றியெழுத,

$3z^2 + 3y^2 + 3x^2 - 6zyx$ என்ற கோவையும்

கிடைக்கின்றன. இங்கு இருமாறிகளை மாற்றியெழுதக் கிடைக்கும் கோவை மாறவில்லை. ஆகவே, இப் பல்லுறுப்புக் கோவையும் x, y, z இம் மூன்று மாறிகளிலும் சமச்சீர்மை பெற்றுள்ள ஒரு சமச்சீர்க் கோவையாகும்.

ஆனால், $x^2 + y^2 - z^2 + xy - yz + zx$ என்ற கோவையில் x, y ஐ மாற்றியெழுதினால் மாத்திரமே கோவை மாறுவதில்லை. ஆனால் $(y, z), (x, y)$ இவற்றை மாற்றியெழுதினால் வேறு கோவைகள் கிடைக்கின்றன. இவை x, y, z-ல் சமச்சீர்மை பெறவில்லை.

ஆகவே, மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து ஒரு கோவை சமச்சீர்மை பெற மாறிகளின் குணகங்கள் எவ்வாறு அமைய வேண்டுமென்று தெரிகிறது.

(ஒரே படியிலுள்ள எல்லா மாறிகளின் குணகங்களும் சமமாக இருக்க வேண்டும்.)

சமச்சீர்க் கோவைகளின் பொது வடிவங்கள்

மாறிகள்	படி	கோவை
x, y	1	$a(x+y)+b$ (அல்லது) $ax+ay+b$
x, y	2	$a(x^2+y^2)+b(xy)+c(x+y)+d$
x, y	3	$a(x^3+y^3)+b(x^2y+xy^2)$ $+c(x^2+y^2)+dxy$ $+e(x+y)+f$
x, y, z	1	$a(x+y+z)+b$
x, y, z	2	$a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)$ $+c(x+y+z)+d$
x, y, z	3	$a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+y^2z+z^2x$ $+xy^2+yz^2+zx^2)+cxyz$ $+d(x^2+y^2+z^2)$ $+e(xy+yz+zx)$ $+f(x+y+z)+g$

பயிற்சி 9·42

பின்வரும் கோவைகள் சமச்சீர்க் கோவைகளா என்று எழுது.

(1) (i) $ax^2 - xy^2 + bx - by + c$

(ii) $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 7x + 8 + 7y$

(iii) $-7x^2 + 4x - 7y^2 + 4y + 8$

(iv) $8y + 8x - 6x^2 - 5xy + 6y$

(v) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$

(vi) $(x^2 + y^2)(x - y)$

(2) $ax^2 + 7xy + bx + 7y^2 - 6y + 8$ என்பது ஒரு சமச்சீர்க் கோவையாக இருக்க வேண்டுமாயின், a, b இவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(3) $ax^4 - bx^3y + y^4 + 8xy^3$ ஒரு சமச்சீர்க் கோவை யென்றால், a, b இவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(4) இரண்டு மாறிகளுள்ள 3ஆம்படி சமச்சீர்க் கோவையின் பொது வடிவத்தை எழுது.

(5) மூன்று மாறிகளுள்ள 2ஆம்படி சமச்சீர்க் கோவையின் பொது வடிவத்தை எழுது.

§28. வட்டச்சமச்சீர்

(1) கீழே கொடுத்துள்ள கோவையில் x-க்குப் பதில் y, y-க்குப் பதில் z, z-க்குப் பதில் x என்று பயன்படுத்தி மாற்றி எழுது.

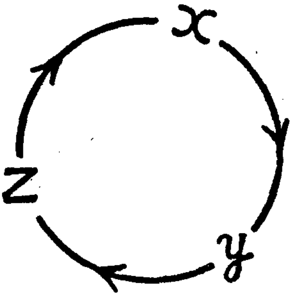
முதல் கோவை :

$$x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2 \quad - \quad (1)$$

மாற்றி எழுதிய கோவை :

$$y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2 + x^2y - xy^2 \quad - \quad (2)$$

இப்பொழுது மாற்றியெழுதிய கோவையும் முதல் கோவையும் ஒன்றே என்று தெரிகிறது. இது ஒரு சமச்சீர் கோவையா ? (x-க்குப் பதில் y ஐயும் y-க்குப் பதில் x ஐயும் மாற்றி எழுதிய புதிய கோவை முதல் கோவையாகவே உள்ளதா?) இல்லை. இஃது ஒரு சமச்சீர்க்கோவை அல்லவெனினும், x, y, z என்ற மூன்று மாறிகளையும் எடுத்துக் கொண்டு 'x' ஐ y இடத்திலும் 'y' ஐ அதற்கடுத்த z இடத்திலும் 'z' ஐ முதல் இடமான x இடத்திலும், ஒரு வட்டத்தில் உள்ள மூன்று புள்ளிகளை வட்டத்தைச் சுழற்றுவதன் மூலம் மாற்றியமைப்பது போல் அமைக்கப் படுவதால், இத்தகைய கோவைகள், 'வட்டச் சமச்சீர் கோவைகள்' எனப் படும்.



படம் 9-4.

இப்பொழுது $x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2$ என்பதை, இரண்டிரண்டு உறுப்புகளாக எடுத்துக்கொண்டு பங்கீட்டுப் பண்பு மூலம் மாற்றியமைக்க.

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x)$$

என்ற கோவை நமக்குக் கிடைக்கிறது. இதை இவ்வாறு நீளமாக எழுதுவதற்குப் பதிலாக, இப்பொழுது கிடைத்துள்ள முதல் உறுப்பை எடுத்துக் கொண்டு ஒரு புதிய குறியைப் பயன்படுத்தி $\sum(x^2y - xy^2)$ என்று எழுதலாம். '$\sum$' என்ற குறியை 'மொத்தம்' என்ற பொருளில் பயன்படுத்துகிறோம். ஆங்கிலத்தில் மொத்தம் அல்லது கூடுதல் என்பதற்கு 'Sum' என்று சொல்கிறோம். இந்தச் சொல்லின் முதல் ஆங்கில எழுத்து '*S*' ஆகும். இதையே கிரேக்க மொழியில் $\sum$ என்று எழுதுகிறோம். இதனைச் 'சிக்மா' (Sigma) என்று படிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\sum\limits_{x, y, z} (x + y)$ என்பதன் பொருள் "*x, y, z* என்ற மாறிகளையுடைய முதல் உறுப்பு $(x+y)$ ஆகக் கொண்ட வட்டச் சமச்சீர் கோவை" என்பதாம். இதனை விரிவுபடுத்தி எழுத

$$\sum_{x, y, z} (x + y) = (x + y) + (y + z) + (z + x)$$

$$= 2x + 2y + 2z$$

இதையே $2(x + y + z)$ என்றும் எழுதலாம். மீண்டும் சிக்மா குறியைப் பயன்படுத்த $2\sum\limits_{x, y, z} x$ என்றாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

சுருக்குக : $\sum(a + b)(a - b)$

$$\sum(a + b)(a - b) = \sum(a^2 - b^2)$$
$$= (a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) + (c^2 - a^2)$$
$$= a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2$$
$$= 0.$$

[குறிப்பு : இங்கு, சிக்மா குறியினுள் கொடுக்கப்பட்ட கோவை, முழுக் கோவையின் முதல் உறுப்பாகும். ஆகவே, முதல் உறுப்பைச் சுருக்கி, வட்டச் சமச்சீர்ப் பண்பைப் பயன்படுத்தி மற்ற இரு உறுப்புகளையும் எழுதிப் பிறகு கோவையைச் சுருக்கி எழுத வேண்டும்.]

பயிற்சி 9·43

சுருக்குக :

(1) $\sum a$ (2) $\sum (x + y)$

(3) $\sum (a^2 - b^2)$ (4) $\sum (a + b - c)$

(5) $\sum (a^2 + b^2 - c^2)$ (6) $\sum a(b - c)$

(7) $(x + y)(x + y - z) + (y + z)(y + z - x) + (z + x)(z + x - y)$

(2) மூன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட கோவைகளை எழுத வேண்டியிருக்கும்போது, மாறிகளை x, y, z, w ... என்று கொள்வதற்குப் பதிலாக, $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம். இந் நிலையில் $\sum$ என்பதற்கு "... போன்ற கோவைகள் அனைத்தின் கூடுதல்" என்று பொருள் கொள்ள வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக,

$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ ஐ, $\sum_{i=1}^{5} x_i$ என்றும்,

$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots (x_7 + y_7)$ என்பதை,

$\sum_{i=1}^{7} (x_i + y_i)$ என்றும் எழுதலாம்.

இப்பொழுது $\sum$ குறியைப் பயன்படுத்திச் சில சூத்திரங்களை எழுதுவோம்.

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ என்பதன் பொருள், i என்ற குறி 1 முதல் n வரையிலுள்ள இயல் எண்களை எடுத்துக் கொள்ளும் பொழுது, அப்படிக் கிடைக்கும் x-க்களின் கூடுதல் என்பதாம்.

இதை $\sum_{i=1}^{n} x_i = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots \ldots + x_n)$ என்று எழுதலாம்.

அதாவது, $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$ என்பதைச் சுருக்கமாக $\sum_{i=1}^{n} x_i$ என்று எழுத வேண்டும். இதே போல்,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n)$$

$$= (x_1 + x_2 + \dots x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

(வரிசைமாற்றுப் பண்பு)

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} kx_i = kx_1 + kx_2 + \dots + kx_n$$

$$= k(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

(பங்கீட்டுப் பண்பு)

$$= k \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

இதேபோல் $\sum_{i=1}^{n} k$ என்றால் k என்ற மாறிலியை n முறை எடுத்துக் கூட்ட வேண்டும் என்று பொருள். அதாவது,

$$\sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k + k + k + \dots + k}_{n \text{ முறை}}$$

$$= n \times k = nk.$$

எடுத்துக்காட்டு :

$x_i = i$ என்றால் $\sum_{i=1}^{10} x_i$-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10})$$

$$= (1 + 2 + 3 + \dots + 10)$$

$$= \frac{10 \times 11}{2} = 55.$$

பயிற்சி 9·44

$x_i = 2i,\quad y_i = 2i - 1$ என்றால்

(1) $\sum_{i=1}^{16} (x_i + y_i)$-ன் மதிப்பு என்ன ?

(2) $\sum_{i=1}^{10} 25$-ன் மதிப்பு என்ன ?

(3) $\sum_{i=1}^{10} 5x_i$-ன் மதிப்பு என்ன ?

10. பயனியல் பகுதி

§1. தொடர் விடுமுதல் (Recurring Deposit)

நாம் ஒவ்வொருவரும், நம்முடைய வருமானத்திற்கு ஏற்ப, திட்டமிட்டுச் செலவழிப்பது அவசியமாகும். திட்டமிட்டுச் செலவழிப்பதுடன், ஓரளவு சேமித்து வைப்பதும் இன்றியமையாததாகும். ஒருவர் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையை, ஒவ்வொரு மாதமும் வங்கியில் கட்டி, ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குப் பிறகு அத்தொகையை வட்டியுடன் சேர்த்துத் திரும்பப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒவ்வொரு மாதமும் ரூ. 10 சேமிக்கும் ஒருவர், 50 மாதங்களுக்கு, தொடர்ந்து மாதம் ரூ. 10 வீதம் வங்கியில் கட்டலாம். வங்கியில் வட்டி கணக்கிடும் பொழுது, முதல் மாதம் கட்டும் ரூ. 10-க்கு, 50 மாதத்திற்குரிய தனி வட்டியும், இரண்டாவது மாதம் கட்டும் ரூ. 10-க்கு 49 மாதத்திற்குரிய தனிவட்டியும், இதேபோல் மூன்றும், நான்காம் மாதங்களில் செலுத்தும் தொகைகளுக்கு முறையே, 48, 47 மாதங்களுக்கும் வட்டி கணக்கிடப்படுகிறது. கடைசியில் 50 ஆவது மாதம் செலுத்திய ரூபாய் 10-க்கு, அந்த மாதத்திய வட்டி மாத்திரமே கிடைக்கும். ஆகவே, இம்மாதிரி கணக்குகளில் நாம் செலுத்தும் தொகைகள் மாறுதிருந்தும், அத்தொகைகள் வங்கியின் கணக்கில் மாறுபட்ட கால இடைவெளிகளில்

கணக்கில் வைக்கப்படுவதால், வெவ்வேறான தொகையே வட்டியாகக் கிடைக்கும். இம் மாதிரி முதலீடு செய்வது **தொடர் விடுமுதல் (Recurring Deposit)** எனப்படும்.

சூத்திரம் காண :

1 மாதத்திற்கு ரூ. 1-க்குக் கிடைக்கும் தனிவட்டி ரூ. i என்க.

தொடர் விடுமுதலில் செலுத்தும் மாதத் தொகை ரூ. P.

பணம் செலுத்தப்படும் மாதங்களின் எண்ணிக்கை n

முதல் மாதம் செலுத்தும் ரூபாய் P-க்குக் கிடைக்கும் வட்டி ரூ. $Pi \times n$

$=$ ரூ. Pin

இரண்டாம் மாத ரூபாய் P-க்குக் கிடைக்கும் வட்டி ரூ. $Pi \times (n-1)$

... ...

... ...

... ...

$(n-1)$ ஆவது மாத ரூ. P-க்குக் கிடைக்கும் வட்டி ரூ. $Pi \times 2$

n ஆவது மாத ரூ. P-க்குக் கிடைக்கும் வட்டி ரூ. $Pi \times 1$

$\therefore$ n மாதங்களுக்குச் செலுத்தப்படும் முதலீடுகளில் கிடைக்கும் மொத்த வட்டி,

$$I = \text{ரூ. } Pin + Pi \times (n-1) + \ldots + Pi \times 2 + Pi \times 1$$

$$= \text{ரூ. } Pi[n + (n-1) + \ldots + 2 + 1]$$

$$= \text{ரூ. } Pi[1 + 2 + \ldots + (n-1) + n]$$

$$= \text{ரூ. } Pi\,\frac{(n+1)n}{2}$$

$$= \text{ரூ. } \frac{n(n+1)}{2}\,Pi$$

தொடர் விடுமுதலில் மாதத் தொகை ரூ. P வீதம் n மாதங்களில் கிடைக்கும் வட்டி $I = \dfrac{n(n+1)}{2}\,Pi.$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒருவர், ஒரு ரூபாய்க்கு ஒரு மாதத்திற்கு 1 பைசா வட்டி அளிக்கும் வங்கியொன்றில் மாதமொன்றுக்கு ரூ. 10 வீதம்

2 ஆண்டுகளுக்குச் செலுத்தி வருகிறார். 24 ஆம் மாதக் கடைசியில் அவருக்குக் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை என்ன?

இங்கு $n = 2 \times 12 = 24,\ P =$ ரூ. 10

$i = \cdot 01$

$$\therefore \text{ வட்டி } I = \frac{n(n+1)}{2} \times Pi = \frac{24 \times 25}{2} \times 10 \times \cdot 01$$

$= $ ரூ. $300 \times 10 \times \cdot 01$

$= $ ரூ. 30

$\therefore$ மொத்தத் தொகை $= $ ரூ. $10 \times 24 +$ ரூ. 30

$= $ ரூ. 270.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

சித்தன் என்பவர், ஆண்டிற்கு 10% தனிவட்டியளிக்கும் வங்கியொன்றில், ஒவ்வொரு மாதமும் ரூ. 20 வீதம் 48 மாதங்களுக்குச் செலுத்தி வருகிறார். 48 ஆம் மாதம் முடிவில் அவருக்குக் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை யாது?

ஆண்டு வட்டிவீதம் $= 10\% = \cdot 1$

$\therefore$ மாத வட்டிவீதம் $i = \dfrac{\cdot 1}{12}$

மாதாந்திர முதலீடு ரூ, 20.

மொத்த மாதங்கள் $n = 48$

$$\therefore \text{ மொத்த வட்டி } I = \frac{Pi\,(n)\,(n+1)}{2}$$

$$= \frac{20^{10} \times \cdot 1}{12_1} \times \frac{48^4 \times 49}{2}$$

$= $ ரூ. 196

மொத்த முதலீடு $= $ ரூ. 20×48

$= $ ரூ. 960

$\therefore$ மொத்தத் தொகை $= $ ரூ. $(960 + 196)$

$= $ ரூ. 1156.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

மாதமொன்றுக்கு ரூ. 25 வீதம் தொடர் விடுமுதலில் முதலீடு செய்யும் ஒருவர் 20 ஆம் மாதக் கடைசியில் ரூ. 552·50 மொத்தத் தொகையாகப் பெறுகிறார் என்றால், அவ் வங்கி யளிக்கும் ஆண்டு வட்டி வீதத்தைக் கண்டுபிடி.

20 ஆம் மாத முடிவில் கிடைக்கும் மொத்தம் ரூ. 552·50

20 மாதங்களில் செய்த மொத்த முதலீடு ரூ. 500·00 (ரூ. 25 × 20)

∴ மொத்த வட்டி $I =$ ரூ. 52·50

வட்டிவீதம் i என்று கொள்.

ஆகவே, மொத்த வட்டி $I = \frac{n(n+1)}{2} \times Pi$

அதாவது, $52{\cdot}50 = \frac{20 \times 21}{2} \times 25 \times i$

$$\therefore \ i = \frac{52{\cdot}50 \times 2}{20 \times 21 \times 25}$$

$$= \frac{105}{20 \times 21 \times 25} = \frac{1}{100}$$

$$= {\cdot}01.$$

∴ ஆண்டு வட்டிவீதம் $= 12 \times {\cdot}01$

$= {\cdot}12$

$= 12\%$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

ஆண்டொன்றுக்கு 8% வட்டியளிக்கும் வங்கியொன்றில், 36ஆம் மாதக் கடைசியில் ரூ. 4044·00 மொத்தத்தொகையாகக் கிடைக்கிறதென்றால், ஒவ்வொரு மாதமும் முதலீடு செய்யும் தொகை என்ன ?

மாத முதலீட்டுத் தொகை ரூ. P என்க.

36 மாதங்களில் மொத்த முதலீடு ரூ. $36P$

மொத்த வட்டி $I = \frac{n(n+1)}{2} Pi$

$$i = \frac{{\cdot}08}{12}, \quad n = 36.$$

$$\therefore \quad I = \text{ரூ.}\ \frac{\cancel{36}^{3} \times 37}{\cancel{2}} \times P \times \frac{\cancel{\cdot 08}^{\cdot 04}}{\cancel{12}}$$

$$= \text{ரூ.}\ 4{\cdot}44\,P$$

மொத்தத் தொகை = ரூ. $36P + 4{\cdot}44P$

இது ரூ. 4044 என்று தரப்பட்டுள்ளது. எனவே

$$36P + 4{\cdot}44P = 4044$$

$$\therefore \quad 40{\cdot}44P = 4044, \qquad \therefore \quad P = 100$$

ஆகவே, ஒவ்வொரு மாதமும் முதலீடு செய்யும் தொகை

ரூ. 100.

பயிற்சி 10·1

(1) ரூ. ஒன்றுக்கு, ஒரு மாதத்திற்கு 2 பைசா வட்டிவீதம், ஒவ்வொரு மாதமும் ஒரு ரூபாய் முதலீடு செய்யப்படும் தொடர் விடுமுதலில் (i) 20 மாதக் கடைசியில் (ii) 30 மாதக் கடைசியில் (iii) 40 மாதக் கடைசியில் (iv) 50 மாதக் கடைசியில் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை என்ன ?

(2) ஒவ்வொரு மாதமும் ரூ. 50 முதலீடு செய்தால், ஆண்டிற்கு 8% வீதம் தனி வட்டி கணக்கிடப்படும் தொடர் விடுமுதலில் 20 மாத முடிவில் திரும்பக் கிடைக்கும் தொகை யாது ?

(3) குணாளன் என்பவர், 5% தொடர் விடுமுதலில் ஒவ்வொரு மாதமும் ரூ. 20 முதலீடு செய்கிறார். 24 மாத முடிவில் அவருக்குக் கிடைக்கும் தொகை யாது ? அதே தொகையை 6% வட்டி கிடைக்கும் தொடர் விடுமுதலில் முதலீடு செய்வதால் 25 மாத முடிவில், அவர் திரும்பப் பெறும் தொகை யாது ?

(4) மாதமொன்றுக்கு ரூ. 25 வீதம் தொடர் விடுமுதலில் முதலீடு செய்யும் ஒருவர், 36 மாத முடிவில் ரூ. 1,066·50 திரும்பப் பெறுகிறார். வட்டிவீதம் என்ன ?

(5) மாதமொன்றுக்கு ரூ. 100 வீதம் தொடர் விடுமுதலில் முதலீடு செய்யும் ஒருவர், 48 மாத முடிவில் ரூ. 5,388·00 பெறுகிறார். இதே தொகையை, முன்பு கிடைத்த வட்டிவீதத்தை விட, 4% அதிக வட்டிக்கு முதலீடு செய்தால், 48 மாத முடிவில் கிடைக்கும் தொகை யாது ?

(6) ஒரு தொகையை 3% தொடர் விடுமுதலில் முதலீடு செய்ததில், 10 மாத முடிவில் ரூ. 13·75 கூடுதலாகக் கிடைத்தது. முதலீடு செய்த தொகை என்ன? அதே தொகையை, எந்த வட்டிவீதத்தில், முதலீடு செய்தால், அதே 10 மாத முடிவில் ரூ. 41·25 கூடுதலாகக் கிடைக்கும்?

§ 2. நேர்முகத் தவணைத் திட்டம் அல்லது நேர்முக வாடகையில் வாங்கும் திட்டம் (Direct Hire Purchase)

இடை நிலை வகுப்பு மக்களால், பொருள்களை வாங்கும் பொழுதே, சில சமயங்களில், அப் பொருளுக்குரிய முழு விலையையும் கொடுக்க இயலாமலிருக்கலாம். வாங்கும் பொருள் களுக்குக் கொடுக்க வேண்டிய மொத்தத் தொகையில் ஒரு பகுதியை அப்பொழுதே கொடுத்து விட்டு மீதித் தொகையை, ஒரு வருட இடைவெளியில் மாதத் தவணையாகக் கொடுத்துக் கடனை அடைத்து விடலாம். பெரும்பாலும், மீதி செலுத்த வேண்டிய தொகையை, சம தவணைகளாகப் பிரித்துக் கொண்டு. மாதா மாதம் செலுத்துவது வழக்கம். இப்படி ஒவ்வொரு மாதமும் தவணை செலுத்தும் பொழுது. அம் மாதத் தொடக் கத்தில் செலுத்த வேண்டிய மீதித் தொகைக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டியையும் செலுத்த வேண்டும். அந்தந்த மாதங்களில் செலுத்திய தொகைக்குப் பின்வரும் மாதங்களில் வட்டி செலுத்த வேண்டியதில்லையாதலால், ஒவ்வொரு மாதமும், கடனுக்காகச் செலுத்தும் தொகை சமமாக இருப்பினும், வட்டிக்காகச் செலுத்தும் தொகை குறைந்து கொண்டே வரும். இவ்விதம் பொருள்களை வாங்கி, தவணை முறையில், அதன் விலையைக் கொடுப்பது, **நேர்முக தவணைத் திட்டம்** அல்லது, **நேர்முக வாடகையில் வாங்கும் திட்டம்** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒருவர் ரூ. 600 மதிப்புள்ள வானொலிப் பெட்டியொன்றை, கையில் ரூ. 100 கொடுத்துவிட்டு மீதித் தொகையை மாதம் ரூ. 50 விதம் செலுத்தி 10 மாதத்தில் கடனை அடைப்பதாகக் கூறி வாங்குகிறார். ஆண்டொன்றுக்கு 12% தனிவட்டி கணக் கிடப் படுகிறதென்றால், தவணை முடிவில் வானொலிப் பெட்டிக் காக அவர் செலுத்தும் மொத்தத் தொகை என்ன? அவர் வட்டிக்காகச் செலுத்தும் தொகை யாது?

வானொலிப் பெட்டியின் தொகை ரூ. 600

வாங்கும் பொழுது செலுத்தும் தொகை ரூ. 100

தவணைகளில் செலுத்த வேண்டிய தொகை ரூ. 500

ஆண்டு வட்டி வீதம் ரூ. 12%

∴ மாத வட்டிவீதம் (ரூபாய்க்கு) ·01

முதல் மாதம் கடைசியில் செலுத்த வேண்டிய வட்டி

= ரூ. 500 × ·01

= ரூ. 5

முதல் மாதம் செலுத்தும் தவணை = ரூ. 50

∴ முதல் மாதம் செலுத்திய மொத்தம் = ரூ. 55

செலுத்த வேண்டிய மீதித் தொகை = ரூ. (500 – 50)

= ரூ. 450

∴ இரண்டாவது மாதத்து வட்டி = ரூ. 450 × ·01

= ரூ. 4·50

இரண்டாவது மாதத் தவணை = ரூ. 50·00

∴ இரண்டாவது மாதம் செலுத்திய மொத்தம்

= ரூ. 54·50

இதேபோல், ஒவ்வொரு மாதமும் செலுத்தும் மொத்தம் 50 வீதம் குறைந்து கொண்டே வரும்.

∴ இத் தவணைகளில் அவர் செலுத்தும் தொகைகளின் மொத்தம் ரூ. (55 + 54·50 + ... + 50·50)

∴ அவர் வானொலிப் பெட்டிக்காகச் செலுத்தும் மொத்தத் தொகை

= ரூ. 100 + ரூ. (55 + 54·50 + ... + 50.50)

$$= \text{ரூ. } 100 + \text{ரூ. } \frac{10(55 + 50{\cdot}50)}{2}$$

(எவ்வாறு ?)

= ரூ. 100 + 5(105·50)

= ரூ. (100 + 527·50)

= ரூ. 627·50

வானொலிப் பெட்டியின் தொகை	ரூ. 600
வாங்கும் பொழுது செலுத்தும் தொகை	ரூ. 100
தவணைகளில் செலுத்த வேண்டிய தொகை	ரூ. 500
ஆண்டு வட்டி வீதம்	ரூ. 12%

∴ மாத வட்டிவீதம் (ரூபாய்க்கு) ·01

முதல் மாதம் கடைசியில் செலுத்த வேண்டிய வட்டி

= ரூ. 500 × ·01

= ரூ. 5

முதல் மாதம் செலுத்தும் தவணை = ரூ. 50

∴ முதல் மாதம் செலுத்திய மொத்தம் = ரூ. 55

செலுத்த வேண்டிய மீதித் தொகை = ரூ. (500 − 50)

= ரூ. 450

∴ இரண்டாவது மாதத்து வட்டி = ரூ. 450 × ·01

= ரூ. 4·50

இரண்டாவது மாதத் தவணை = ரூ. 50·00

∴ இரண்டாவது மாதம் செலுத்திய மொத்தம்

= ரூ. 54·50

இதேபோல், ஒவ்வொரு மாதமும் செலுத்தும் மொத்தம் 50 வீதம் குறைந்து கொண்டே வரும்.

∴ இத் தவணைகளில் அவர் செலுத்தும் தொகைகளின் மொத்தம் ரூ. (55 + 54·50 + ... + 50·50)

∴ அவர் வானொலிப் பெட்டிக்காகச் செலுத்தும் மொத்தத் தொகை

= ரூ. 100 + ரூ. (55 + 54·50 + ... + 50.50)

$$= \text{ரூ. } 100 + \text{ரூ. } \frac{10\,(55 + 50\cdot50)}{2}$$

(எவ்வாறு ?)

= ரூ. 100 + 5(105·50)

= ரூ. (100 + 527·50)

= ரூ. 627·50

மாகச் செலுத்திவிட்டு மீதித் தொகையை, அடுத்து வரும் மாதங்களில், மாதமொன்றுக்கு ரூ. 100 வீதம் கட்டிக் கடனை அடைக்க வேண்டும். தவணை முறையில் ஆண்டொன்றிற்கு 21% தனி வட்டி கணக்கிடப் படுகிறது. இத் தவணை முறையில் மின்சாரச் சலவை யந்திரம் வாங்கும் ஒருவர் செலுத்தும் தொகை எவ்வளவு? அவர் ரொக்க விலையை விட எவ்வளவு அதிகம் கொடுக்கிறார்?

§3. கூட்டு வட்டி (மீள் பார்வை)

பயிற்சி 10·3

$$[A = P(1+i)^n]$$

(1) ரூ. 500-க்கு இரண்டு ஆண்டுகளில் ஆண்டுக்கு 5% வட்டிவீதம் கிடைக்கும் கூட்டு வட்டி எவ்வளவு?

(2) ஓர் அசலுக்கு 2 ஆண்டுகளில், ஆண்டுக்கு 4% வட்டி வீதம் கிடைக்கும் தனி வட்டிக்கும் கூட்டு வட்டிக்குமுள்ள வித்தியாசம் ரூ. 64 என்றால், அசல் எவ்வளவு?

(3) ஓர் அசல் ஆண்டுக்கு 10% கூட்டு வட்டிவீதம் இரண்டு ஆண்டுகளில் ரூ. 5082 மொத்தமானால், அசல் எவ்வளவு?

(4) ஓர் அசல் முதல் ஆண்டில் ரூ. 50 கூட்டு வட்டியும், இரண்டாம் ஆண்டில் ரூ. 54 கூட்டு வட்டியும் கொடுக்குமானால் அசல், வட்டிவீதம் இவற்றைக் கணக்கிடு.

(5) நான், என் நண்பரிடமிருந்து ரூ. 1,000 ஆண்டுக்கு 8% தனி வட்டி வீதத்தில் கடன் வாங்கி, உடனேயே, வேறொரு நண்பருக்கு ஆண்டுக்கு 9% கூட்டு வட்டி வீதத்தில் கடனாகக் கொடுக்கிறேன். இரண்டாம் ஆண்டு முடிவில், என் நண்பரிடமிருந்து கடனைத் திரும்பப் பெற்று, என்னுடைய கடனை அடைத்தால், நான் அடையும் இலாபம் என்ன?

(6) ரூ. 5,000 இரு ஆண்டுகளில் ரூ. 1272 கூட்டு வட்டியைத் தருகிறது என்றால், வட்டிவீதம் என்ன?

(7) ஒரு வியாபாரி ஆறு மாதத்திற்கொரு முறை வட்டியை அசலுடன் சேர்க்கும் வங்கியொன்றில் ரூ. 7,500 செலுத்துகிறார். வட்டிவீதம் ஆண்டொன்றிற்கு 10% என்றால், ஆண்டு முடிவில் அவர் கணக்கிலிருக்கும் தொகை என்ன?

(8) ஒரு நகரத்தின் மக்கள தொகை 2·5 மில்லியன். இந் நகரத்தின் மக்கள் தொகை 10 ஆண்டுகளில் 18% வீதம் அதிகரிக்கிறது. 20 ஆண்டுகளுக்குப்பின் இந் நகரத்தின் மக்கள் தொகையைக் கணக்கிடு.

(9) ஓர் இயந்திரத்தின் விலை ரூ. 5,600. இயந்திரத்தின் மதிப்பு ஆண்டுக்கு 20% வீதம் குறைகிறது. இரண்டாண்டுகளுக்குப் பிறகு, இவ் வியந்திரத்தை அக் குறைந்த விலைக்கு விற்பதற்குப் பதில் ரூ. 4,000-க்கு விற்பதினால் கிடைக்கும் இலாப சதவீதம் என்ன ?

(10) ஓர் அசலைக் கூட்டு வட்டிக்கு விட்டதில், 2 ஆண்டுகளில் ரூ. 4,410 மொத்தமாகவும், 3 ஆண்டுகளில் ரூ. 4,630·50 மொத்தமாகவும் கிடைக்குமானால், அசல், வட்டிவீதம் இவற்றைக் கண்டுபிடி. (எஸ்.எஸ்.எல்.ஸி.)

கூட்டு வட்டி (அட்டவணையைப் பயன்படுத்தல்)

இரண்டு அல்லது மூன்று அலகு காலத்திற்குக் கூட்டு வட்டி காண்பதற்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல் எளிதாக இருக்கும். அதற்கு மேற்பட்ட காலத்திற்குக் கூட்டு வட்டி காணுதல் இம் முறையில் கடினம். அந் நேரங்களில், ஏற்கெனவே, கணித்துத் தரப்பட்டுள்ள அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்திக் கூட்டு வட்டி காணலாம். இங்கு n-ன் பல மதிப்புகளுக்கும், i-ன் பல மதிப்புகளுக்கும் இசைந்த $(1+i)^n$-ன் மதிப்புகளும், $(1+i)^{-n}$-ன் மதிப்புகளும் அட்டவணைப்படுத்தித் தரப்பட்டுள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக, i-ன் மதிப்பு 4% என்றும் (அதாவது ·04 என்றும்) n-ன் மதிப்பு 8 என்றும் எடுத்துக்கொண்டால், s-அட்டவணையில், $(1+04)^8$-ன் மதிப்பு 1·368569 என்று கிடைக்கும். a-அட்டவணையில் $(1+\cdot 04)^{-8}$-ன் மதிப்பு ·730690 என்று கிடைக்கும். s-அட்டவணைக்கு மொத்த மதிப்பு அட்டவணை என்றும், a-அட்டவணைக்கு நிகழ்மதிப்பு அட்டவணை என்றும் பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தொடர் வட்டிவீதம் ஆண்டொன்றுக்கு 6% எனில், தற்போது செலுத்தப்படும் ரூ. 1,500, 14ஆம் ஆண்டு முடிவில் எவ்வளவு மொத்தம் தரும் ?

அட்டவணையில் ·06 என்ற நிரலிலும், 14 என்ற வரிசையிலுமாக இருக்கும் எண் 2·260903.

எனவே, ரூ. 1 ஆனது 14 வருட முடிவில் ரூ. 2·260903 ஆகிறது.

எனவே, ரூ. 1,500 ஆனது 14 ஆண்டு முடிவில்

= ரூ. 1500 × 2·260903

= ரூ. 3391·3545 ஆகிறது.

அதாவது 14 ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் மொத்தம்

= ரூ. 3391·35.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தொடர் வட்டிவீதம் ஆண்டுக்கு 10% வட்டியானது அசலுடன் ஆறுமாதங்களுக்கொருமுறை சேர்க்கப்படுகிறது. தற்போது செலுத்தப்படும் ரூ. 4000, 6 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு எவ்வளவு மொத்த வட்டி தரும் ?

வட்டி அசலுடன், மொத்தம் 12 முறை சேர்க்கப்படுவதால் $n = 12$. ஆனால் வட்டிவீதம் $i = \frac{\cdot 1}{2} = \cdot 05$

$n = 12$, $i = \cdot 05$-க்கு இசைந்த அட்டவணை எண்

$= 1\cdot 795856$

எனவே 6ஆம் வருட முடிவில் மொத்தம்

= ரூ. 4000 × 1·795856

= ரூ. 7183·424

= ரூ. 7183·42

(பைசே திருத்தமாக)

எனவே மொத்த வட்டி = ரூ. (7183·42 − 4000)

= ரூ. 3183·42.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

மூன்று மாதங்களுக்கொரு முறை வட்டி அசலுடன் சேர்க்கப் படும் வங்கியொன்றில், ஐந்து வருடங்களுக்கு முன் ஆண்டொன் றிற்கு வட்டி வீதம் 12% என்ற கணக்கில் நான் முதலீடு செய்த தொகை, இப்பொழுது ரூ. 6321 ஆகியிருந்தால், நான் முதலீடு செய்த தொகை யாது ? (ரூபாய் சுத்தமாக விடையளிக்கவும்)

இந்தக் கணக்கில் மொத்தத் தொகை கொடுக்கப்பட்டிருக் கிறது. அசலைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

ஆகவே, கூட்டு வட்டி நிகழ் மதிப்பு அட்டவணையைப் பயன் படுத்தி விடை காண வேண்டும்.

இங்கு $n = 5 \times 4 = 20$

$i = \cdot 12 \times \frac{1}{4} = \cdot 03$

நிகழ் மதிப்பு அட்டவணையில் $n = 20$, $i = \cdot 03$-க்கு

இசைந்த அட்டவணை எண் $= 0 \cdot 553676$

ஆகவே, முதலீடு செய்த தொகை = ரூ. $632 \cdot 1 \times 0 \cdot 553676$

= ரூ. $3499 \cdot 76$

= ரூ. $3500 \cdot 00$ ரூபாய்த் திருத்தமாக.

பயிற்சி 10·4

(1) மொத்தத் தொகையைக் கண்டுபிடி.

அசல்	ஆண்டுகள்	தவணை	ஆண்டு வட்டி வீதம்
(i) ரூ. 500	3	6 மாதத்திற்கொரு முறை	12%
(ii) ரூ. 3,200	8	ஆண்டிற்கொரு முறை	8%
(iii) ரூ. 4000	4	காலாண்டிற்கொரு முறை	12%

(2) வட்டியைக் கண்டுபிடி.

அசல்	ஆண்டுகள்	தவணை	ஆண்டு வட்டி வீதம்
(i) ரூ. 5000	8	ஆண்டுக்கொரு முறை	7%
(ii) ரூ. 4,800	6	ஆறு மாதத்திற்கொரு முறை	10%
(iii) ரூ. 3600	5	காலாண்டிற்கொரு முறை	8%

(3) ஓர் அசலை ஆண்டொன்றிற்கு 8% வீதம் கூட்டு வட்டிக்கு விட்டு, ஆறு மாதத்திற்கொரு முறை வட்டி அசலுடன் சேர்க்கப்படுமானால், எவ்வளவு ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு இந்த அசல் இரட்டிப்பாகும் என்று கண்டுபிடி.

(குறிப்பு : $i = \cdot 04$ என்று கொண்டு ரூ. 2 எந்த ஆண்டு நிரலின் கீழ் வருகிறது என்று பார்.)

(4) நிகழ் மதிப்பு அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி, அசலைக் கண்டுபிடி (ரூபாய்த் திருத்தமாய் விடையளி).

மொத்தத் தொகை	ஆண்டு கள்	தவணை	வட்டி வீதம்
(i) ரூ. 1402·55	5	ஆண்டிற்கொரு முறை	7%
(ii) ரூ. 3166·93	4	ஆறுமாதத்திற்கொரு முறை	6%
(iii) ரூ. 4000	4	காலாண்டிற்கொரு முறை	8%

4. ஆண்டுத் தொகை (Annuity)

ஆண்டுத் தொகை என்பது சமமான கால இடைவெளிகளில் செலுத்தப்படும், சமமான தொகைகளின் கூடுதலாகும். இவ்வாண்டுத் தொகைகளின் மொத்தம் என்பது, எல்லாக் கால இடைவெளிகளிலும் செலுத்தப்படும் ஒவ்வொரு முதலுக்கும், மீதியுள்ள கால இடைவெளிகளுக்கு, கூட்டு வட்டிவீதம் கணக்கிடப்படும் கூட்டுத் தொகைகளின் மொத்தமாகும்.

சுருக்கமாக, ஆண்டுத் தொகையின் மொத்தம் அவ்வாண்டுகளில் செலுத்தப்படும் தொகைகளின் இறுதி மதிப்பாகும்.

ஒவ்வொரு காலப் பகுதியின் முடிவிலும் ரூ. P முதலீடு செய்தோமானால், அந்த முதலீடுகள் 'n' ஆண்டுகளில் முறையே,

$$P(1+i)^{n-1},\ P(1+i)^{n-2},\ \ldots,\ P(1+i),\ P$$

மொத்தத் தொகைகளாகும். இவற்றின் மொத்தமே ஆண்டுத் தொகையின் மொத்தமாகும். ஆண்டுத் தொகையின் மொத்தத்தை '$S_n i$' என்று குறிப்பிடுகிறோம். கூட்டு வட்டியில், மொத்தத் தொகை காண அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவது போலவே, இங்கும் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி மொத்தத் தொகையைக் காணலாம். மொத்தத் தொகை அட்டவணையிலேயே,

$$P(1+i)^{n-1}, P(1+i)^{n-2} \ldots, P(1+i), P$$

முதலியவற்றைக் கண்டுபிடித்துக் கூட்டுவதற்குப் பதிலாக ஆண்டுத் தொகையின் மொத்தம் காணத் தனியாக அட்டவணை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கூட்டு வட்டியில், மொத்தம் கொடுத்து அசல் கண்டுபிடிப்பதுபோலவே, ஆண்டுத் தொகை கணக்கிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட காலப் பகுதியின் தொடக்க கால மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

அதாவது ஆண்டுத் தொகையின் நிகழ் மதிப்பு ($a_n i$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்) அவ்வாண்டுகளின் ஒவ்வொன்றின் இறுதியிலும் செலுத்தப்படும் தொகைகளின் தொடக்க மதிப்பாகும். ஆண்டுத் தொகையின் மொத்த மதிப்பு காண, கூட்டு வட்டி மொத்தத் தொகை அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவது போலவே, ஆண்டுத் தொகை நிகழ் மதிப்பு காணவும், கூட்டு வட்டி நிகழ் மதிப்பு அட்டவணையில், குறிப்பிட்ட காலப்பகுதிகளுக்கு, குறிப்பிட்ட வட்டிவீதம், கிடைக்கும் நிகழ் மதிப்புகளைக் கூட்ட வேண்டும்.

ஆண்டுத் தொகையில் நிகழ் மதிப்பு கண்டுபிடிக்கவும் தனியாக அட்டவணை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இவ்விரு அட்டவணைகளையுங்கூட, கூட்டுவட்டி கணக்குகளில் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தியது போலவே, பயன்படுத்த வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஆண்டு ஒன்றிற்கு ரூ. 1000 வீதம் 10 ஆண்டுகளுக்கு, ௸ 8% ஆண்டு வட்டிவீதம் செலுத்தப்படும் ஆண்டுத் தொகையின் (a) மொத்தம் (b) நிகழ் மதிப்பு இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(a) அட்டவணையில் ·08 என்ற நிரலிலும், 10 என்ற வரிசையிலுமாக உள்ள எண் 14·486562.

எனவே, ஆண்டுதோறும் செலுத்தும் ரூ. 1 ஆனது 10 ஆம் ஆண்டு முடிவில் கொடுக்கும் தொகை = ரூ. 14·486562

எனவே, ஆண்டுதோறும் செலுத்தும் ரூ. 1000 ஆனது 10 ஆம் ஆண்டு முடிவில் கொடுக்கும் தொகை

= ரூ. 1000 × 14·486563 = ரூ. 14,486·563

= ரூ. 1,4486·56

(b) நிகழ் மதிப்பு அட்டவணையில் ·08 என்ற நிரலிலும், 10 என்ற வரிசையிலுமாக உள்ள எண் 6·710081.

ரூ. 1 செலுத்தினால், அதன் நிகழ் மதிப்பு ரூ. 6·710081

ரூ. 1000 செலுத்தினால், அதன் நிகழ் மதிப்பு

= ரூ. 1000 × 6·710081

= ரூ. 6710·081

= ரூ. 6710·08

பயிற்சி 10·5

அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்தி, ஆண்டுத் தொகையின் மொத்தம், நிகழ் மதிப்பு இவற்றைக் கண்டுபிடி.

ஆண்டொன்றுக்குச் செலுத்தப்படும் தொகை	தவணை	ஆண்டுகள்	வட்டி விதம்
(1) ரூ. 5000	ஆண்டுதோறும்	5	7%
(2) ரூ. 100	ஆறு மாதத்திற்கொரு முறை	10	8%
(3) ரூ. 1,200	மூன்று மாதத்திற்கொரு முறை	3	8%
(4) ரூ. 2,400	ஆறு மாதத்திற்கொரு முறை	8	8%
(5) ரூ. 600	மூன்று மாதத்திற்கொரு முறை	5	12%

அட்டவணைகள்

1. $S = (1 + i)^n$

$\frac{i}{n}$	1%	2%	3%	4%
1.	1·0100 00	1·0200 00	1·0300 00	1·0400 00
2.	1·0201 00	1·0404 00	1·0609 00	1·0816 00
3.	1·0303 01	1·0612 08	1·0927 27	1·1248 64
4.	1·0406 04	1·0824 32	1·1255 09	1·1698 59
5.	1·0510 10	1·1040 81	1·1592 74	1·2166 53
6.	1·0615 20	1·1261 62	1·1940 52	1·2653 19
7.	1·0721 35	1·1486 86	1·2298 74	1·3159 32
8.	1·0828 57	1·1716 59	1·2667 70	1·3685 69
9.	1·0936 85	1·1950 93	1·3047 73	1·4233 12
10.	1·1046 22	1·2189 94	1·3439 16	1·4802 44
11.	1·1156 68	1·2433 74	1·3842 34	1·5394 54
12.	1·1268 25	1·2682 42	1·4257 61	1·6010 32
13.	1·1380 93	1·2936 07	1·4685 34	1·6650 74
14.	1·1494 74	1·3194 79	1·5125 90	1·7316 77
15.	1·1609 69	1·3458 68	1·5579 67	1·8009 44
16.	1·1725 79	1·3727 86	1·6047 06	1·8729 81
17.	1·1843 04	1·4002 41	1·6528 48	1·9479 01
18.	1·1961 47	1·4282 46	1·7024 33	2·0258 17
19.	1·2081 09	1·4568 11	1·7535 06	2·1068 49
20.	1·2201 90	1·4859 47	1·8061 11	2·1911 23

$S = (1 + i)^n$

$\frac{i}{n}$	5%	6%	7%	8%
1.	1·0500 00	1·0600 00	1·0700 00	1·0800 00
2.	1·1025 00	1·1236 00	1·1449 00	1·1664 00
3.	1·1576 25	1·1910 16	1·2250 43	1·2597 12
4.	1·2155 06	1·2624 77	1·3107 96	1·3604 89
5.	1·2762 82	1·3382 26	1·4025 52	1·4693 28
6.	1·3400 96	1·4185 19	1·5007 30	1·5868 74
7.	1·4071 00	1·5036 30	1·6057 82	1·7138 24
8.	1·4774 55	1·5938 48	1·7181 87	1·8509 30
9.	1·5513 28	1·6894 79	1.8384 59	1·9990 85
10.	1·6288 95	1·7908 48	1·9671 51	2·1589 25
11.	1·7103 39	1·8982 99	2·1048 52	2·3316 39
12.	1·7958 56	2·0121 97	2·2521 92	2·5181 70
13.	1·8856 49	2·1329 28	2·4098 45	2·7196 24
14.	1·9799 32	2·2609 03	2·5785 34	2·9371 94
15.	2·0789 28	2·3965 58	2·7590 32	3·1721 69
16.	2·1828 75	2·5403 52	2·9521 64	3·4259 43
17.	2·2920 18	2·6927 73	3·1588 15	3·7000 18
18.	2·4066 19	2·8543 39	3·3799 32	3·9960 20
19.	2·5269 50	3·0256 00	3·6165 28	4·3157 01
20.	2·6532 98	3·2071 36	3·8696 85	4·6609 57

II. $a = v^n = (1+i)^{-n}$

$\frac{i}{n}$	1%	2%	3%	4%
1.	0·9900 99	0.9803 92	0·9708 74	0·9615 39
2.	0·9802 96	0·9611 69	0·9425 96	0·9245 56
3.	0·9705 90	0·9423 22	0·9151 42	0·8889 96
4.	0·9609 80	0·9238 45	0·8884 87	0·8548 04
5.	0·9514 66	0·9057 31	0·8626 09	0·8219 27
6.	0·9420 45	0·8879 71	0·8374 84	0·7903 15
7.	0·9327 18	0·8705 60	0·8130 92	0·7599 18
8.	0·9234 83	0·8534 90	0·7894 09	0·7306 90
9.	0·9143 40	0·8367 55	0·7664 17	0·7025 87
10.	0·9052 87	0·8203 48	0·7440 94	0·6755 64
11.	0·8963 24	0·8042 63	0·7224 21	0·6495 81
12.	0·8874 49	0·7884 93	0·7013 80	0·6245 97
13.	0·8786 63	0·7730 33	0·6809 51	0·6005 74
14.	0·8699 63	0·7578 75	0·6611 18	0·5774 75
15.	0·8613 50	0·7430 15	0·6418 62	0·5552 65
16.	0·8528 21	0·7284 46	0·6231 67	0·5339 08
17.	0·8443 78	0·7141 63	0·6050 17	0·5133 73
18.	0·8360 17	0·7001 59	0·5873 95	0·4936 28
19.	0·8277 40	0·6864 31	0·5702 86	0·4746 42
20	0·8195 45	0·6729 71	0·5536 76	0·4563 87

$$a = v^n = (1 + i)^{-n}$$

$\frac{i}{n}$	5%	6%	7%	8%
1.	0·9523 81	0·9433 96	0·9345 79	0·9259 26
2.	0·9070 30	0·8899 96	0·8734 39	0·8573 39
3.	0·8638 38	0·8396 19	0·8162 98	0·7938 32
4.	0·8227 03	0·7920 94	0·7628 95	0·7350 30
5.	0·7835 26	0·7472 58	0·7129 86	0·6805 83
6.	0·7462 15	0·7049 61	0·6663 42	0·6301 70
7.	0·7106 81	0·6650 57	0·6227 50	0·5834 90
8.	0·6768 39	0·6274 12	0·5820 09	0·5402 69
9.	0·6446 09	0·5918 99	0·5439 34	0·5002 49
10.	0·6139 13	0·5583 95	0·5083 49	0·4631 94
11.	0·5846 79	0·5267 88	0·4750 93	0·4288 83
12.	0·5568 37	0·4969 69	0·4440 12	0·3971 14
13.	0·5303 21	0·4688 39	0·4149 65	0·3676 98
14.	0·5050 68	0·4423 01	0·3878 17	0·3404 61
15.	0·4810 17	0·4172 65	0·3624 46	0·3152 42
16.	0·4581 12	0·3936 46	0·3387 35	0·2918 91
17.	0·4362 97	0·3713 64	0·3165 74	0·2702 69
18.	0·4155 21	0·3503 44	0·2958 64	0·2502 49
19.	0·3957 34	0·3305 13	0·2765 08	0·2317 12
20.	0·3768 90	0·3118 05	0·2584 19	0·2145 48

III. $S_n i = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

$\frac{i}{n}$	1%	2%	3%	4%
1.	1·0000 00	1·0000 00	1·0000 00	1·0000 00
2.	2·0100 00	2·0200 00	2·0300 00	2·0400 00
3.	3·0301 00	3·0604 00	3·0909 00	3·1216 00
4.	4·0604 01	4·1216 08	4·1836 27	4·2464 64
5.	5·1010 05	5·2040 40	5·3091 36	5·4163 23
6.	6·1520 15	6·3081 21	6·4684 10	6·6329 76
7.	7·2135 35	7·4342 83	7·6624 62	7·8982 95
8.	8·2856 71	8·5829 69	8·8923 36	9·2142 26
9.	9·3685 27	9·7546 28	10·1591 06	10·5827 95
10.	10·4622 13	10·9497 21	11·4638 79	12·0061 07
11.	11·5668 35	12·1687 15	12·8077 96	13·4863 51
12.	12·6825 03	13·4120 90	14·1920 30	15·0258 06
13.	13·8093 28	14·6803 32	15·6177 91	16·6268 38
14.	14·9474 21	15·9739 38	17·0863 24	18·2919 11
15.	16·0968 96	17·2934 17	18·5989 14	20·0235 88
16.	17·2578 65	18·6392 85	20·1568 81	21·8245 31
17.	18·4304 43	20·0120 71	21·7615 88	23·6975 12
18.	19·6147 48	21·4123 12	23·4144 35	25·6454 13
19.	20·8108 95	22·8405 59	25·1168 68	27·6712 29
20.	22·0190 04	24·2973 70	26·8703 75	29·7780 79

$$S_{n}i = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$\frac{i}{n}$	5%	6%	7%	8%
1.	1·0000 00	1·0000 00	1·0000 00	1·0000 00
2.	2·0500 00	2·0600 00	2·0700 00	2·0800 00
3.	3·1525 00	3·1836 00	3·2149 00	3·2464 00
4.	4·3101 25	4·3746 16	4·4399 43	4·5061 12
5.	5·5256 31	5·6370 93	5·7507 39	5·8666 01
6.	6·8019 13	6·9753 19	7·1532 91	7·3359 29
7.	8·1420 09	8·3938 38	8·6540 21	8·9228 03
8.	9·5491 09	9·8974 68	10·2598 03	10·6366 28
9.	11·0265 64	11·4913 16	11·9779 89	12·4875 58
10.	12·5778 93	13·1807 95	13·8164 48	14·4865 62
11.	14·2067 87	14·9716 43	15·7835 99	16·6454 88
12.	15·9171 27	16·8699 41	17·8884 51	18·9771 27
13.	17·7129 83	18·8821 38	20·1406 43	21·4952 97
14.	19·5986 32	21·0150 66	22·5504 88	24·2149 20
15.	21·5785 64	23·2759 70	25·1290 22	27·1521 14
16.	23·6574 92	25·6725 28	27·8880 54	30·3242 83
17.	25·8403 66	28·2128 80	30·8402 17	33·7502 26
18.	28·1323 85	30·9056 53	33·9990 33	37·4502 44
19.	30·5390 04	33·7599 92	36·3789 65	41·4462 63
20.	33·0659 54	36.7855 91	40·9954 92	45·7619 64

IV. $a_n i = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$

$\frac{i}{n}$	1%	2%	3%	4%
1.	0·9900 99	0·9803 92	0·9708 74	0·9615 39
2.	1·9703 95	1·9415 61	1·9134 70	1·8860 95
3.	2·9409 85	2·8838 83	2·8286 11	2·7750 91
4.	3·9019 66	3·8077 29	3·7170 98	3·6298 95
5.	4·8534 31	4·7134 60	4·5797 07	4·4518 22
6.	5·7954 77	5·6014 31	5·4171 91	5·2421 37
7.	6·7281 95	6.4719 91	6·2302 83	6·0020 55
8.	7·6516 78	7·3254 81	7·0196 92	6·7327 45
9.	8·5660 18	8·1622 37	7·7861 09	7·4353 32
10.	9·4713 05	8·9825 85	8·5302 03	8·1108 96
11.	10·3676 28	9·7868 48	9·2526 24	8·7604 77
12.	11·2550 78	10·5753 41	9·9540 04	9·3850 74
13.	12·1337 40	11·3483 74	10·6349 55	9·9856 48
14.	13·0037 03	12·1062 49	11·2960 73	10·5631 23
15.	13·8650 53	12·8492 64	11·9379 35	11·1183 87
16.	14·7178 74	13·5777 09	12·5611 02	11·6522 96
17.	15·5622 51	14·2918 72	13·1661 19	12·1656 69
18.	16·3982 69	14·9920 31	13·7535 13	12·6592 97
19.	17·2260 89	15·6784 62	14.3237 99	13·1339 39
20.	18·0455 53	16·3514 33	14·8774 75	13·5903 26

$$a_{n}\,i = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

i / n	5%	6%	7%	8%
1.	0·9523 81	0·9433 96	0·9345 79	0·9259 26
2.	1·8594 10	1·8333 93	1·8080 18	1·7832 65
3.	2·7232 48	2·6730 12	2·6243 16	2·5770 97
4.	3·5459 51	3·4651 06	3·3872 11	3·3121 27
5.	4·3294 77	4·2123 64	4·1001 97	3·9927 10
6.	5·0756 92	4·9173 24	4·7665 40	4·6228 80
7.	5·7863 73	5·5823 81	5·3892 89	5·2063 70
8.	6·4632 13	6·2097 94	5·9712 99	5·7466 39
9.	7·1078 22	6·8016 92	6·5152 32	6·2468 88
10.	7·7217 35	7·3600 87	7·0235 82	6·7100 81
11.	8·3064 14	7·8868 75	7.4986 74	7·1389 64
12.	8·8632 52	8·3838 44	7·9426 86	7·5360 78
13.	9·3935 73	8·8526 83	8·3576 51	7·9037 76
14.	9·8986 41	9·2949 84	8·7454 68	8·2442 37
15.	10·3796 58	9·7122 49	9·1079 14	8·5594 79
16.	10·8377 70	10·1058 95	9·4466 49	8·5513 69
17.	11·2740 66	10·4772 60	9·7632 23	9·1216 38
18.	11·6895 87	10·8276 04	10·0590 87	9·3718 87
19.	12·0853 21	11·1581 17	10·3355 95	9·6035 99
20.	12·4622 10	11·4699 21	10·5940 14	9·8181 47

11. புள்ளியியல்

(Statistics)

§1. புள்ளியியல் என்பது, புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்து, ஒழுங்கு படுத்தி, அவற்றை ஆராய்ந்து, அவற்றினின்று சில உண்மைகளைக் கண்டறிய உதவும் அறிவியற் பகுதியாகும்.

முதன் முதலில் 17 ஆம் நூற்றாண்டில் காப்டன் ஜான் கிரன்ட் (Captain John Graunt, கி. பி. 1620-1674) என்பவர், 'பிறப்பு இறப்பு' புள்ளியியல் பற்றி விரிவாக ஆராய்ச்சி செய்தார். அதே நூற்றாண்டில் பந்தயங்களில் வெற்றி பெறத்தக்க வாய்ப்புகளைப்பற்றி புள்ளியியல் மூலமாகக் கணக்கிடும் முறையைப் பாஸ்கல் (Pascal Blaise, கி. பி. 1623-1662) என்ற பிரெஞ்சு நாட்டு கணித வல்லுநர் கண்டறிந்தார். இன்றைய இருபதாம் நூற்றாண்டின் புள்ளியியல் வல்லுநர் ஃபிஷர் (Fisher, கி. பி. 1890—1962) என்பவர், புதிய புள்ளியியல் முறையின் தந்தை என்று கருதப்படுகிறார். இவர் புள்ளி அனுமானம், பரிசோதனைகளினுடைய வரைபடங்களின் தோற்றம் போன்ற தலைப்புகளைப் பற்றி ஆராய்ந்து எழுதியிருக்கிறார். இவற்றைப் பற்றி நீங்கள் மேல் வகுப்பில் படிப்பீர்கள்.

புள்ளி விவரங்கள் எண் சார்ந்தவையாக இருத்தல் வேண்டும். விவரங்கள் தவறாக இருந்தால், அவற்றினின்று நாம் பெறும் முடிவுகளும் தவறானவைகளாக இருத்தல் கூடுமாகையால், விவரங்களை மிகுந்த கருத்துடன் சேகரித்தல் அவசியம்.

அளந்தறியக் கூடிய எந்த ஒரு பொருளைப் பற்றியும் விவரங்கள் சேகரிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, கோயம்புத்தூரில் மாதாந்திர மழை, ஒரு பள்ளி மாணவர்களின் நிறை, ஓர் இயந்திரம் ஆக்கும் ஆணிகளின் நீளம்—இவை போன்றவைகள், —அளந்தறியக் கூடிய பொருள்கள்—இவற்றை **மாறிகள்** (Variables) என்று குறிப்பிடுவோம்.

மாறிகள் இருவகைப்படும். அவையாவன (1) தொடர்ச்சியான மாறிகள் (Continuous variables) (2) தனித்த மாறிகள் (Discrete variables). தகுந்தவாறு குறிப்பிட்ட இரு எண்களுக்கிடையேயுள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பையும் ஒரு மாறியானது எடுத்துக்கொள்ள இயலும் எனில், அத்தகைய மாறிகள் **தொடர்ச்சியான மாறிகள்** எனப்படும். அவ்வாறன்றி, மாறி

யானது, குறிப்பிட்ட சில மதிப்புகளை மட்டுமே எடுத்துக் கொள்ள இயலுமாயின், அதனைத் தனித்த மாறி என்போம். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு பசு அன்றாடம் கறக்கும் பாலின் அளவு தொடர்ச்சியான மாறி. ஒரு பால் பண்ணையிலுள்ள மாடுகளின் கன்றுகளின் எண்ணிக்கை ஒரு தனித்த மாறி.

எந்த ஒரு கூட்டத்திலுள்ள பொருள்களைப் பற்றி ஆராய முற்படுகிறோமோ, அக் கூட்டத்தை அண்டம் (Universe) என்று வழங்குகிறோம். அண்டத்தின் பொருள்களுக்கு, எடுத்துக் கொண்ட மாறியின் மதிப்புகளை, ஒவ்வொன்றாக அளந்து காண வேண்டும். இவ்வாறு விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக் காட்டாக, உன் பள்ளி மாணவர்களின் உயரங்களைப் பற்றி அறிய விரும்பினால், இங்கு அண்டமானது உன் பள்ளி மாணவர் களின் கணம் ஆகும். உயரம்தான் இங்கு மாறி. ஒவ்வொரு மாணவனின் உயரமும் மாறியின் ஒவ்வொரு மதிப்பு. இவ்வாறு பெறப்பட்ட மதிப்புகளே விவரங்கள்.

பொருள், அண்டம், மாறி, விவரங்கள் ஆகியவற்றிற்கு இன்னும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் அடியில் தரப்பட்டுள்ளன :

(1) பொருள் : சென்னையில் 1972-ல், அன்றாட மீப்பெரு வெப்பம்.

அண்டம் : 1972ஆம் ஆண்டின் நாள்களின் (366 நாள்கள்) கணம்.

மாறி : மீப்பெரு வெப்பம்.

விவரங்கள் : இவ் வெப்ப அளவுகள் (இங்கு 366 எண்கள் கிடைக்கும்).

(2) பொருள் : தமிழ்நாட்டின் மாவட்டங்களில் 1973-ல், வேர்க்கடலை விளைச்சல்.

அண்டம் : தமிழ் நாட்டின் மாவட்டங்களின் கணம். { சென்னை, செங்கற்பட்டு... } .

மாறி : வேர்க்கடலை விளைச்சல்.

விவரங்கள் : இவ் விளைச்சல் அளவுகள், மாவட்ட வாரி யாக.

§ 2. ஓர் ஆராய்ச்சியில் கிடைக்கும் விவரங்களின் எண்ணிக்கை பெரிதாக இருந்தால், அவற்றிலிருந்து, நாம் எதையும் புரிந்து கொள்வது கடினம். எடுத்துக்காட்டாக, உன் பள்ளி மாணவர்களின் உயரங்களை ஆராய்வோம். உன் பள்ளியில் 500 மாணவர்கள் இருந்தால், நமக்கு 500 உயர அளவுகள் விவரங்களாகக் கிடைக்கும். இவற்றை அப்படியே படித்துப் பார்த்துப் பயன் பெறுதல் இயலாது. ஆகவே, இவ் விவரங்களை எளிதில் புரியும் முறையில் காட்டுதல் வேண்டும். இதற்கு ஒழுங்கு படுத்துதல் (Organisation) என்று பெயர். ஒழுங்கு படுத்துதல் இருவகைப் படும். அவையாவன : (1) அட்டவணைப் படுத்துதல் (Tabulation) (2) படவிளக்கம் தருதல் (Graphical representation).

(1) அட்டவணைப் படுத்துதல்

40 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு வகுப்பில் நடந்த ஒரு தேர்வில், அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு :

36	12	24	59	36	30	42	14	13	81
0	39	100	22	38	43	26	29	38	47
20	54	62	31	10	89	68	47	56	39
44	79	56	4	23	95	73	60	40	64

இவற்றைச் சுருக்கமாக ஓர் அட்டவணையில், தொகுத்தெழுதிக் காட்ட வேண்டுமாயின், அடியிற் கூறியபடி செயல்படலாம்.

இங்கு மிகப் பெரிய எண் 100, மிகச் சிறிய எண் 0. இவற்றின் வித்தியாசம் 100 − 0 = 100. ஆகவே இதனை, 0 முதல் 10 வரை, 11 முதல் 20 வரை, ... 91 முதல் 100 வரை என்று 10 பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். ஒவ்வொரு பிரிவிலும் (Class) அடங்கிய மதிப்பெண்களைப் பெற்ற மாணவர்கள் எத்தனை பேர் என்பதை அடுத்தபடியாகக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். இதற்கு, மேற்கூறிய பிரிவுகளை முதலில் ஒன்றன் கீழ் ஒன்றாக எழுத வேண்டும். பிறகு மாணவர்களின் மதிப்பெண்களை ஒவ்வொன்றாகப் படித்து, அவை எந்தெந்தப் பிரிவுகளில் விழுகின்றனவோ அப் பிரிவுகளுக்கெதிராக / என்று ஒரு முறை குறியிட்டுக் கொள்ள வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, 36 என்ற எண்ணுக்கிசைவாக, '31 முதல்

40 வரை' என்ற பிரிவுக் கெதிரில் / என்று குறியிட வேண்டும். 12-க்கு இசைவாக, '11 முதல் 20 வரை' என்ற பிரிவுக் கெதிரில் / என்று குறியிட வேண்டும். கடைசியாக 64-க்கு இசைவாக '61 முதல் 70 வரை' என்ற பிரிவுக்கெதிரில் / என்று குறியிட வேண்டும். ஒவ்வொரு பிரிவுகளிலும் / குறிகளை எண்ணுவதற்குச் சௌகரியமாக, இக் குறிகளை ஐந்து-ஐந்தாக அடுக்கி எழுதிச் செல்லவேண்டும். '31 முதல் 40 வரை' என்ற பிரிவிற்கெதிரில் உள்ள குறிகள் //////// இங்கு ஐந்தாவது குறியை அடிக்கும் குறியாக மாற்றி 卌/// என்று எழுத வேண்டும் (அட்டவணையைப் பார்க்க).

பிரிவுகள்	குறிகள்	நிகழ்வெண்
0 முதல் 10 வரை	///	3
11 முதல் 20 வரை	////	4
21 முதல் 30 வரை	卌/	6
31 முதல் 40 வரை	卌///	8
41 முதல் 50 வரை	卌	5
51 முதல் 60 வரை	卌	5
61 முதல் 70 வரை	///	3
71 முதல் 80 வரை	//	2
81 முதல் 90 வரை	//	2
91 முதல் 100 வரை	//	2
		40

குறிகளை நீக்கிவிட்டு மேற்கண்ட அட்டவணையைச் சுருக்கமாகப் பின்வருமாறு தரலாம். இதற்கு நிகழ்வுப் பட்டியல் (Frequency table) என்று பெயர்.

ஒவ்வொரு பிரிவிலுமுள்ள குறிகளின் மொத்தம் நிகழ்வெண்கள் (frequency) எனப்படும். அப் பிரிவிலுள்ள எண்கள் எத்தனை முறை 'நிகழ்கின்றன' என்பதை அவை குறிப்பதைக் காண்க.

நிகழ்வெண் பட்டியல்

பிரிவுகள்	நிகழ்வெண்
0 முதல் 10 வரை	3
11 முதல் 20 வரை	4
21 முதல் 30 வரை	6
31 முதல் 40 வரை	8
41 முதல் 50 வரை	5
51 முதல் 60 வரை	5
61 முதல் 70 வரை	3
71 முதல் 80 வரை	2
81 முதல் 90 வரை	2
91 முதல் 100 வரை	2
மொத்தம்	40

நிகழ்வுப் பட்டியலைத் தயாரிக்கும்பொழுது கவனிக்க வேண்டியவை

(1) பிரிவுகள் ஒன்றுக்கொன்று பொதுவற்றவையாக இருத்தல் வேண்டும். '0 முதல் 10 வரை', '10 முதல் 20 வரை' என்று இரு பிரிவுகளை எடுத்துக்கொள்வது சரியல்ல. ஏனெனில் மதிப்பெண் 10-க்கு இசைந்த 1 குறியை இவ்விரு பிரிவுகளில் எங்கிடுவது என்று ஐயம் ஏற்படுமல்லவா? ஆயினும், பிரிவுகளை, '0 முதல் $10\frac{1}{2}$ வரை', '$10\frac{1}{2}$ முதல் $20\frac{1}{2}$ வரை' என்று எடுத்துக் கொள்வதனால், இவ்வித ஐயம் ஏற்படாது. மாணவர்களின் திறன் என்பது ஒரு தொடர்ச்சியான மாறியாகும். மதிப்பெண்கள், முழு எண்ணுக்குச் சுத்தமாகத் திருத்தப்பட்டவையே ஆகும். எனவே, 10·459 மதிப்பெண்கள் பெற்றவன் முதல் பிரிவிலும், 10·5 மதிப்பெண் பெற்றவன் இரண்டாம் பிரிவிலும் இடம் பெறுவான்.

(2) பிரிவுகள் கூடியவரை சம இடைவெளிகள் கொண்டவையாக இருத்தல் நலம். '0 முதல் 10 வரை' '11 முதல் 30 வரை', '31 முதல் 67 வரை', '68 முதல் 100 வரை' என்பவையும் பிரிவுகளே. ஆயினும், கணித முறைகளைப் பயன்படுத்துவதற்கு, சம இடைவெளிகளை எடுத்துக்கொள்வது விரும்பத்தக்கது.

(3) அட்டவணையில், பிரிவுகளை, எண்சார் ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில்தான் எழுத வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, '11 முதல் 20 வரை என்ற பிரிவுக்கு அடுத்தபடியாக '61 முதல் 70 வரை' என்ற பிரிவை எழுதக் கூடாது.

(4) பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை பொதுவில் மொத்த நிகழ்வெண்ணைப் பொறுத்து 5-க்குக் குறையாமலும், 25-க்கு மேற்படாமலும் இருத்தல் வேண்டும்.

பயிற்சி 11·1

பின்வரும் விவரங்களை அட்டவணைப் படுத்துக

(1) ஓர் இரசாயன கூட்டுப் பொருளை, 15 மாணவர்கள் நிறுத்துப் பார்த்துக் கொடுத்த விவரம் (கிராமில்).

13·20	13·32	13·20	13·32	13·30
13·30	13·30	13·20	13.20	13·31
13·34	13·31	13·32	13·30	13·20

(2) மாதாந்திரத் தேர்வில், ஒரு வகுப்பிலுள்ள 50 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் (மொத்த மதிப்பெண் — 25).

8	12	23	11	0	4	19	8	8	23
11	10	11	25	7	8	7	19	7	9
10	9	12	9	24	10	10	11	22	10
24	10	4	3	10	0	24	7	21	9
22	2	0	12	16	15	11	13	20	6

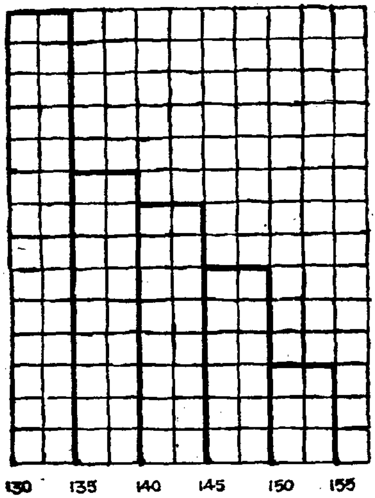
(2) படவிளக்கம் தருதல்

தனித்த மாறிகளைக் கொண்ட விவரங்களுக்குச் செவ்வக விளக்கப்படங்கள் (Bar diagram) வரைவதைப்பற்றி முன் வகுப்பில்

படித்திருக்கிறீர்கள். தொடர்ச்சியான மாறிகளுக்கு வரையப்படும் செவ்வக விளக்கப் படம் நிகழ்வுச் செவ்வகப் படம் (Frequency histogram) எனப்படும். இங்கு ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் ஒரு செவ்வகம் வரையப்படும்; அச் செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகள், அந்தந்தப் பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களின் விகிதத்தில் இருக்கும். பிரிவுகளின் இடைவெளிகள் சம அளவுடையதாயிருக்கும்போதுதான், செவ்வகங்களின் நீளங்கள் நிகழ்வெண்களின் விகிதத்தில் இருக்கும். அடியிற் கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டுகள் இதனை விளக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு, ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகப்படம் வரைக.



படம் 11-1.

மாணவர்களின் உயரம் (செமீ-ல்)

பிரிவுகள்	நிகழ்வெண்
130 — 135	14
135 — 140	9
140 — 145	8
145 — 150	6
150 — 155	4
மொத்தம்	41

பிரிவு இடை வெளிகள் சம அளவு கொண்டிருப்பதால், செவ்வகங்களின் உயரங்களை முறையே, 14 செமீ, 9 செமீ, 8 செமீ, 6 செமீ, 4 செமீ என்று எடுத்துக்கொண்டிருக்கிறோம். (இங்கு 7 செமீ, 4·5 செமீ, 4 செமீ, 3 செமீ, 2 செமீ என்று எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டிருக்கிறது.) இதனால் அவற்றின் பரப்பளவுகளும் 14 : 9 : 8 : 6 : 4 என்ற விகிதங்களில் உள்ளன.

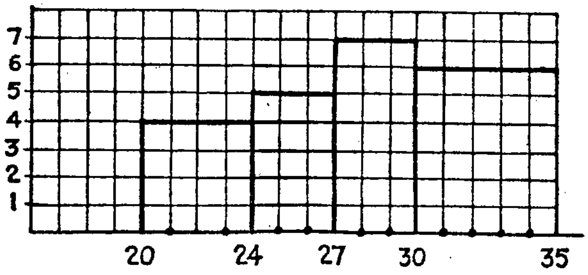
எடுத்துக்காட்டு 2 :

பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகப்படம் வரைக.

தொழிலாளர்களின் வார வருமானம் ரூபாயில்

பிரிவுகள்	நிகழ்வெண்
20 — 24	16
24 — 27	15
27 — 30	21
30 — 35	30
மொத்தம்	82

பிரிவு இடைவெளிகள் முறையே, 4, 3, 3, 5 இவற்றை அடிப்பக்கங்களாகக் கொண்ட செவ்வகங்களின் பரப்புகள் முறையே 16, 15, 21, 30 ஆக இருக்க வேண்டும். ஆகவே அவற்றின் உயரங்கள் முறையே $\frac{16}{4}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{30}{5}$ அதாவது 4, 5, 7, 6 ஆக இருக்க வேண்டும். படத்தை அடியில் காண்க :

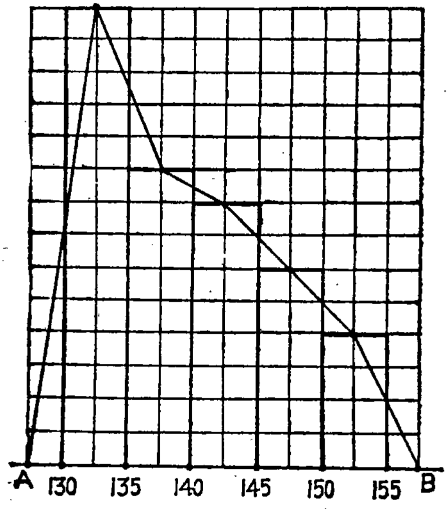


படம் 11-2.

நிகழ்வுப் பல்கோணம் (Frequency Polygon)

சம இடைவெளிகள் கொண்ட பிரிவுகளுக்கு, நிகழ்வெண்கள் தரப்பட்டிருந்தால், நிகழ்வுச் செவ்வகப்படம் வரையலாம்.

மல்லவா? இப் படத்திலுள்ள செவ்வகங்களின் மேற் பக்கத்தின் நடுப்புள்ளிகளை அடுத்தடுத்துச் சேர்த்தால் கிடைக்கும் வரை படம், நிகழ்வுப் பல் கோணம் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு 1-ல் உள்ள விவரங்களுக்கு வரையப்பட்ட நிகழ் வுப் பல்கோணத்தைப் படத்தில் காண்க. இங்கு, *A*, *B* என்பன இரு புறத்திலும் பூச்சிய உயரம் கொண்ட இரு செவ் வகங்களின் மேற் பக் கங்களின் நடுப்புள்ளி களாகும். கோடு களால் இவற்றையும் சேர்த்துக் கொள்வது வழக்கம்.



படம் 11-3.

பயிற்சி 11·2

(1) பின்வரும் விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகங்கள் வரைக :

(a) மாணவர்களின் நிறை (கிகி)

பிரிவுகள்	நிகழ்வெண்
30 — 33	6
33 — 38	10
38 — 41	9
41 — 43	8
43 — 47	3
மொத்தம்	36

(b) 60 வோல்ட் மின் பல்புகள் எரியும் நேரம் (மணியில்)

பிரிவுகள்	நிகழ்வெண்
900 — 1,000	10
1,000 — 1,100	9
1,100 — 1,200	15
1,200 — 1,300	10
1,300 — 1,400	6
மொத்தம்	50

(2) கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வுப் பல்கோணங்கள் வரைக :

(a) பூமியிலிருந்து 2மீ உயரத்தில், மரங்களின் விட்டங்கள் சென்டி மீட்டரில்

பிரிவுகள்	நிகழ்வெண்
50 — 55 செமீ	30
55 — 60	62
60 — 65	84
65 — 70	110
70 — 75	130
75 — 80	200
80 — 85	160
85 — 90	125
90 — 100	100

(b) மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள்

பிரிவுகள்	நிகழ்வெண்
0 — 20	8
20 — 40	4
40 — 60	10
60 — 80	5
80 — 100	3

§3. கிடைத்துள்ள புள்ளி விவரங்களை, ஆராய முற்படும்போது, மாறியின் சில தன்மைகளைப் பரிசோதிக்க விரும்புகிறோம். முதலாவதாக, கொடுத்துள்ள மாறிகள் ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பையடுத்தே அமைகின்றனவா என்று காண விரும்புகிறோம். அப்படிப்பட்ட மதிப்பொன்று இருந்தால், அதற்குச் சராசரி (Average) என்று பெயர். சராசரிகள் பலவகைப்படும். அவற்றில் முக்கியமான மூன்று சராசரிகளைக் கணக்கிடும் விதங்களை அடியில் விவரிப்போம்.

கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean)

மாறி x-ன் தனித்த மதிப்புகள் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனில், அம்மாறியின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ என்பது $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ ஆகும்.

x_1 என்னும் மதிப்பு, f_1 முறையும், x_2 எனும் மதிப்பு f_2 முறையும் ... x_n எனும் மதிப்பு f_n முறையும் நிகழ்ந்தால், x-ன்

கூட்டுச் சராசரி,

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + x_1 + \cdots f_1 \text{ தடவை}) + (x_2 + x_2 + \cdots f_2 \text{ தடவை}) + \cdots}{f_1 + f_2 + \cdots}$$

$$= \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

பத்து பழங்களின் எடைகள் பின்வருமாறு (கிராமில்)

126, 124, 137, 149, 138, 142, 129, 146, 131, 144
அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி எடையைக் காண்க :

$$\bar{x} = \frac{10 \text{ பழங்களின் மொத்த எடை}}{\text{பழங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{126 + 124 + 137 + 149 + 138 + 142 + 129 + 146 + 131 + 144}{10}$$

$$= \frac{1366}{10} = 136 \cdot 6 \text{ கிராம்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு கூடையில் 126 கிராம் எடையுள்ள பழங்கள் 4-ம், 124 கிராம் எடையுள்ள பழங்கள் 2-ம், 149 கிராம் எடையுள்ள பழங்கள் 6-ம், 146 கிராம் எடையுள்ள பழங்கள் 8-ம் இருந்தால், அப் பழங்களின் கூட்டுச் சராசரி எடை என்ன ?

இங்கு $x_1 = 126, f_1 = 4 ; \ x_2 = 124, f_2 = 2 ;$

$x_3 = 149, f_3 = 6 ; \ x_4 = 146, f_4 = 8.$

எனவே,

$$\bar{x} = \frac{4 \times 126 + 2 \times 124 + 6 \times 149 + 8 \times 146}{4 + 2 + 6 + 8}$$

$$= \frac{2814}{20} = 140 \cdot 7$$

மாறியின் மதிப்புகள் சில இடங்களில் நிகழ்வுப் பட்டியலின் மூலம் தரப்பட்டிருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டு 1-ல் தரப் பட்டுள்ள விவரங்களை எடுத்துக் கொள்வோம். இதன்படி, 14 மாணவர்களது உயரங்கள் (செமீ-ல்) 130-க்கு மேல் 135-க்குள் ளாக அமைந்திருக்கின்றன என்று அறிகிறோம். இவர்களது தனித்

தனி உயரங்கள் நமக்குத் தெரியாதபோது, இந்தப் பிரிவின் நடுப் புள்ளியையே, இவர்களின் சராசரி உயரமாக எடுத்துக் கொள்வது தவறாகாது. அதாவது 14 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் $\frac{130 + 135}{2} = 132 \cdot 5$ செமீ என்று கொள்வோம். இவ்வாறே 9 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 137·5 செமீ. மற்றும் 8 பேரின் உயரம் 142·5 செமீ; 6 பேரின் உயரம் 147·5 செமீ; 4 பேரின் உயரம் 152·5 செமீ என்றும் கொள் வோம். இப்போது அவர்களின் உயரத்தின் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{14 \times 132\cdot5 + 9 \times 137\cdot5 + 8 \times 142\cdot5 + 6 \times 147\cdot5 + 4 \times 152\cdot5}{14 + 9 + 8 + 6 + 4}$$

= 138·9 செமீ. இதனை அட்டவணைப்படுத்திச் செய்தல் அழகாகவும், தவறுகளைத் தவிர்ப்பதாயும் அமையும். இம் முறை அடியில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை

பிரிவுகள்	நிகழ்வெண் f	பிரிவின் நடுப் புள்ளி x	$f \times x$
130 — 135	14	132·5	1855·0
135 — 140	9	137·5	1237·5
140 — 145	8	142·5	1140·0
145 — 150	6	147·5	885·0
150 — 155	4	152·5	610·0
மொத்தம்	41		5727·5

ஆகவே, கூட்டுச் சராசரி $= \frac{5727\cdot5}{41} = 139\cdot7$

சுருக்கு முறை:

பெருக்கல்களை எளிதில் செய்வதற்கு, பங்கீட்டுப் பண்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு சுருக்கு முறையைக் கடைபிடிக்கலாம். x-ன் மதிப்புகள் 132·5, 132·5 + 5, 132·5 + 10, 132·5 + 15, 132·5 + 20 என்று இருப்பதால்,

$$= \frac{14 \times 132{\cdot}5 + 9 \times (132{\cdot}5 + 5) + 8 \times (132{\cdot}5 + 10) + 6 \times (132{\cdot}5 + 15) + 4 \times (132{\cdot}5 + 20)}{41}$$

$$= \frac{\underbrace{14 \times 132{\cdot}5} + \underbrace{9 \times 132{\cdot}5} + 9 \times 5 + \underbrace{8 \times 132{\cdot}5} + 8 \times 10 + \underbrace{6 \times 132{\cdot}5} + 6 \times 15 + \underbrace{4 \times 132{\cdot}5} + 4 \times 20}{41}$$

$$= \frac{(14 + 9 + 8 + 6 + 4)\, 132{\cdot}5 + 9 \times 5 + 8 \times 10 + 6 \times 15 + 4 \times 20}{41}$$

$$= \frac{41 \times 132{\cdot}5}{41} + \frac{9 \times 5 + 8 \times 10 + 6 \times 15 + 4 \times 20}{41}$$

$$= 132{\cdot}5 + \frac{295}{41}$$

$= 132{\cdot}5 + 7{\cdot}2$ (ஒரு தசம இடத் திருத்தமாக)

$= 139{\cdot}7$

இதனை அடியில் அட்டவணைப் படுத்திக் காட்டியுள்ளது. அட்டவணை முறையில் கணக்கிடுதலே எளிய முறை என்பதை வழக்கத்தில் காணலாம்.

அட்டவணை

பிரிவுகள்	நிகழ்வெண் f	பிரிவின் நடுப் புள்ளி x	$X = x - 132{\cdot}5$	$f \times X$
130 — 135	14	132·5	0	0
135 — 140	9	135·6	5	45
140 — 145	8	142·5	10	80
145 — 150	6	147·5	15	90
150 — 155	4	152·5	20	80
மொத்தம்	41			295

$$\frac{295}{41} = 7{\cdot}2$$

எனவே, $\bar{x} = 132{\cdot}5 + 7{\cdot}2 = 139{\cdot}7$ செமீ.

§4. நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (Weighted Arithmetic Mean)

ஒரு கம்பெனியின் பல்வேறு தர ஊழியர்களின் மாதச் சம்பளங்கள் அடியில் தரப்பட்டுள்ளன :

மானேஜர்	ரூ.	1010
எழுத்தர்	ரூ.	260
தொழிலாளி தரம் 1	ரூ.	250
தொழிலாளி தரம் 2	ரூ.	150

அக் கம்பெனி ஊழியரின் சராசரி சம்பளத்தைக் கணக்கிட வேண்டுமாயின், $\frac{1010 + 260 + 250 + 150}{4} = 417 \cdot 50$ ரூ.

என்று கணக்கிடுவது தவறு. ஏனெனில், மானேஜர், எழுத்தர், தொழிலாளி ஆகியவர் சம எண்ணிக்கையில் அமர்த்தப்பட்டுள்ளதாகக் கருதினால்தான் கூட்டுச் சராசரி ரூ. 417·50 ஆகும். உண்மையில் அங்கு ஒரு மானேஜரும், 5 எழுத்தர்களும், தொழிலாளிகள் முதல் தரத்தில் 12 பேரும், இரண்டாம் தரத்தில் 69 பேரும் வேலை செய்யலாம். அப்போது அவர்களது கூட்டுச் சராசரி சம்பளம்,

$$\frac{1 \times 1010 + 5 \times 260 + 12 \times 250 + 69 \times 150}{1 + 5 + 12 + 69} = \frac{15660}{87}$$

$$= \text{ரூ. } 180$$

என்பதே சரியல்லவா ? இங்கு 1, 5, 12, 69 என்ற எண்களை நிறைகள் என்று கூறுகிறோம். மேற்கூறியவற்றிலிருந்து, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ என்ற எண்களுக்கு நிறைகள் முறையே, $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ எனில், அவ்வெண்களின் நிறையிட்ட கூட்டுச் சாரசரி,

$$= \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n}$$

எடுத்துக்காட்டு :

அரிசி, பருப்பு, எண்ணெய், நெய் ஆகியவற்றின் விலைகள் முறையே 60%, 80%, 85%, 95% ஏறியிருக்கின்றன. துய்ப்பவர்களின் (consumer) நோக்கில், இவற்றின் முக்கியத்துவம்

40 : 25 : 12 : 6 எனில், விலைவாசிகளின் ஏற்றம் (கூட்டுச்) சராசரி எவ்வளவு ?

இக் கணக்கை அட்டவணைப் படுத்திச் செய்வோம்.

அட்டவணை

பொருள்கள்	பழைய விலை	நிகழ் விலை x	நிறை w	$w \times x$
அரிசி	100	160	40	6400
பருப்பு	100	180	25	4500
எண்ணெய்	100	185	12	2220
நெய்	100	195	6	1170
மொத்தம்			83	14290

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $= \frac{14290}{83} = 172{\cdot}2.$

எனவே, விலைவாசிகள் 72·2% ஏறியுள்ளன.

பயிற்சி 11·3

(1) ஒரு புத்தகத்தின் முதல் 10 வாக்கியங்களின் ஒவ்வொரு வாக்கியத்திலுமுள்ள வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை பின் வருமாறு.

24, 39, 46, 7, 17, 12, 15, 12, 19, 19

இவ் வாக்கியங்களின் கூட்டுச் சராசரி வார்த்தைகளைக் கண்டுபிடி.

(2) ஒரு கிரிக்கட் ஆட்டத்தில், சேர்ந்தாற்போல் வீசிய பந்துகளில் எடுத்த ஓட்டங்கள் முறையே 4, 0, 2, 6, 6, 4 இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி ஓட்டத்தைக் கண்டுபிடி.

(3) 40 மாணவர்களுள்ள ஒரு வகுப்பில், அவர்களின் வயது பின்வருமாறு அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளது.

வயது	15ஆ. 1மா.	15ஆ. 2மா.	15ஆ. 3மா.	15ஆ. 4மா.	15ஆ. 5மா.	15ஆ. 6மா.
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (நிகழ்வெண்)	4	5	7	16	5	3

அவ் வகுப்பு மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி வயது என்ன ?

(4) ஒரு புத்தகத்திலுள்ள 100 வாக்கியங்களின் ஒவ்வொரு வாக்கியத்திலுமுள்ள வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை, அடியில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளது. அவ் வாக்கியங்களின் கூட்டுச் சராசரி வார்த்தைகளைக் கண்டுபிடி.

(வார்த்தைகளின்) பிரிவுகள்	1 — 5	6 — 10	11 — 15	16 — 20	21 — 25	26 — 30	31 — 3!
நிகழ்வெண்	15	27	32	15	7	3	1

(5) 60 வாட் மின் பல்புகளின் எரியும் நேரம் (மணியில்)

பிரிவுகள்	900 — 1000	1000 — 1100	1100 — 1200	1200 — 1300	1300 — 1400
நிகழ்வெண்	10	9	15	10	6

பல்புகள் எரியும் கூட்டுச் சராசரி நேரம் எவ்வளவு ?

(6) பூமியிலிருந்து 2 மீட்டர் உயரத்தில் சில மரங்களின் விட்டங்கள் (செ மீ.)

பிரிவுகள்	50 — 55	55 — 60	60 — 65	65 — 70	70 — 75
நிகழ்வெண்	30	62	84	110	114

மரங்களின் கூட்டுச் சராசரி விட்டமென்ன ?

(7) ஒரு விடுமுறை நாளில் விளையாடிய கால் பந்தாட்டத்தில் எடுத்த கோல்களின் எண்ணிக்கை அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டுள்ளது.

கோல்கள்	0	1	2	3	4	5	6
நிகழ்வெண்	21	20	19	2	7	2	1

அன்று விளையாடிய கால் பந்தாட்டங்களின் கூட்டுச் சராசரி கோல்கள் எத்தனை ?

(8) துவரை, உளுந்து, பயறு, கடலை பருப்புகளின் விலைகள் முறையே 16%, 50%, 113%, 46% ஏறியிருக்கின்றன. துய்ப்பவர்களின் நோக்கில் இவற்றின் முக்கியத்துவம் 8 : 5 : 1 : 2 (நிறையிட்ட) கூட்டுச் சராசரி எனில், விலைவாசி ஏற்றத்தின் (நிறையிட்ட) கூட்டுச் சராசரி எவ்வளவு ?

(9)

பொருள்கள்	பழைய விலை	நிகழ் விலை	நிறை
கம்பளி	100	160	2
பருத்தி	100	150	10
பட்டு	100	220	5

மேற்கண்ட துணி வகைகளின் விலைவாசி ஏற்றம் (கூட்டுச்) சராசரி எவ்வளவு ?

(10)

பொருள்கள்	பழைய விலை	தற்போதைய விலை	நிறை
மண்ணெண்ணெய்	100	120	5
விறகு	100	133	8
கரி	100	125	10
எரிவாயு	100	85	9

மேற்கண்ட எரிபொருள்களின் விலைவாசி ஏற்றம் (கூட்டுச்) சராசரி எவ்வளவு ?

§ 5. இடைநிலையளவு (Median)

பல இடங்களில் கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்குப் பிரதிநிதியான ஓர் எண்ணை, வேறு விதங்களில் காண முடியும். 7 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் தேவைப்பட்டால், அவர்களை உயர வரிசையில் நிற்க வைத்து, நடு மாணவனாகிய 4 ஆம் மாணவனின் உயரத்தை மட்டும் அளந்து, அதுவே சராசரி உயரம் என்று கூறலாம். இத்தகைய சராசரிக்கு **இடைநிலையளவு** என்று பெயர். எடுத்துக்காட்டாக, 89, 10, 84, 61, 4 என்ற எண்களின் இடைநிலை அளவைக் காண வேண்டுமாயின், முதலில் அவற்றை ஏறு வரிசையில் எழுதவும்.

4, 10, 61, 84, 89

இப்போது நடுவிலுள்ள எண்ணாகிய 61 தான் இடைநிலையளவாகும்.

கொடுத்துள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை, இரட்டையாயின், இரு நடுமதிப்புகள் கிடைக்கும். அவற்றின் கூட்டுச் சராசரியை, இடைநிலையளவாகக் கொள்ளலாம். எடுத்துக்காட்டாக, 64, 24, 42, 32, 81, 76 என்ற எண்களுக்கு, இடைநிலையளவு காண வேண்டுமாயின், முதலில் அவற்றை ஏறு வரிசையில்

24, 32, **42**, **64**, 76, 81

என்றெழுத, 42, 64 என்ற இரு நடு எண்களைப் பெறுகிறோம். எனவே, இடைநிலையளவு $\frac{42+64}{2} = 53$.

§ 6. முகடு (Mode)

ஒரு வரிசையிலுள்ள மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் 46, 48, 71, 46, 72, 46, 0, 46, 46, 39 என்றிருந்தால், இவ்வரிசையிலுள்ள 10 மாணவர்களில், அதிகமானவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 46 ஆகும். ஆகவே, சராசரியை 46 என்றே கொள்ளலாம். இத்தகைய சராசரியை **முகடு** என்கிறோம்.

மாறியின் மதிப்புகளில், எம் மதிப்பு மிக அதிகமான முறைகள் நிகழ்கிறதோ, அம் மதிப்பை முகடு என்கிறோம்.

பயிற்சி 11·4

(1) பகடைக் காய்களைப் பத்து முறைகள் வீசியதில் கிடைத்த எண்ணிக்கைகள் பின் வருமாறு :

3, 6, 4, 3, 5, 3, 1, 2, 3, 3

இவ்வெண்ணிக்கையின் முகடு என்ன ?

(2) ஒரு வகுப்பிலுள்ள, ஒரு குழுவில் 11 மாணவர்களுள்ளனர். அவர்கள் மாதாந்திரத் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு :

8, 34, 14, 54, 17, 36, 57, 44, 60, 91, 80

மதிப்பெண்களின் இடைநிலையளவு என்ன ?

(3) விளையாட்டொன்றில் பங்கு கொள்ளும் 10 மாணவர்களின் உயரம் (செமீ) பின்வருமாறு :

142, 155, 144, 155, 160, 153, 149, 167, 152, 155

உயரத்தின் இடைநிலையளவு என்ன ? முகடு என்ன ?

(4) அதே மாணவர்களின் எடை (கி. கிராமில்) பின் வருமாறு :

32, 40, 33, 42, 30, 32, 36, 40, 37, 36

எடையின் இடைநிலையளவு, முகடு இவற்றைக் கண்டுபிடி.

§ 7. மேற் கூறிய மூன்று சராசரிகளில், கூட்டுச் சராசரியே பல இடங்களில் பயன்படுகிறது. ஆயினும், சில இடங்களில் இடைநிலையளவு பயன்படுகிறது. முக்கியமாக மாறியின் மிகப் பெரிய, மிகச் சிறிய மதிப்புகள் சரிவரத் தெரியாத இடத்தில், கூட்டுச் சராசரியைவிட இடைநிலையளவு உகந்த சராசரியாகும்.

ஒரு வண்டி நிறையப் பலாப் பழங்கள் வந்திறங்கியிருப்பதாகக் கொள்வோம். அவற்றில் "சராசரிப்" பழத்தை எவ்வாறு காண்பது ? அப் பழங்களில் எந்த அளவு (size) பழம் மிக அதிக எண்ணிக்கை கொண்டுள்ளதோ, அதன் அளவைச் சராசரி அளவு என்று கருத வேண்டுமல்லவா ? இங்கு முகடு பயன்படுவதைக் காணலாம். இவ்விடத்தில் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடுதல் மிகக் கடினம். இடைநிலையளவு காணுதலும் கடினமே.

சோதனைத்தாள்

[நேரம் : 1½ மணி

I. கோடிட்ட இடங்களில் விட்டுப்போன விவரங்களைத் தரவும்.

(1) ஒரு புள்ளி விவரத்தை, பிரிவிடைவெளியாகத் தொகுத்தெழுதுகையில், பிரிவிடைகளின் எண்ணிக்கை ——— -க்குக் குறையாமலும், ——— ஐ, மிகாமலும் இருக்க வேண்டும்.

(2) நிகழ்வுச் செவ்வகங்களின் மேற்புறங்களின் நடுப் புள்ளிகளை அடுத்தடுத்துச் சேர்ப்பதால் கிடைக்கும் வரை படம் ——— எனப்படும்.

(3) மாறியின் மதிப்புகளில் எம் மதிப்பு மிக அதிகமான முறைகள் நிகழ்கிறதோ, அம் மதிப்பை ——— என்கிறோம்.

(4) புதிய புள்ளியியல் முறையின் தந்தை ———

II. கீழ்க் கொடுக்கப்பட்டவை சரியா, தவறு எனக் கண்டுபிடி.

(1) கூட்டுச் சராசரி காண மாறி மதிப்புகளின் மொத் தத்தை மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் பெருக்க வேண்டும்.

(2) ஒரு புள்ளி விவரத்தில் அதிக நிகழ்வெண்ணுள்ள மதிப்பு இடைநிலையளவு எனப்படும்.

(3) முதன் முதலில் காப்டன் ஜான் க்ரன்ட் என்பவர், 'பிறப்பு இறப்பு' புள்ளி விவரத்தைப் பற்றி விரிவாக ஆராய்ச்சி செய்தார்.

(4) குறிப்பிட்ட புள்ளி விவரத்தை வரைபடத்தில் செவ் வகங்கள் மூலம் காட்டுவதற்கு, நிகழ்வெண் பல்கோணம் என்று பெயர்.

(5) ஒரு வீட்டிலுள்ள, பள்ளிக்குச் செல்லும் குழந்தை களின் எண்ணிக்கை ஒரு தனித்த மாறி.

III. கீழ் கொடுக்கப்பட்டவற்றை இணைத்தெழுது :

(1) நிகழ்வெண் பல்கோணம்	வரிசைப்படுத்தி எழுதிய புள்ளி விவரத்தின் நடு மதிப்பெண்
(2) கூட்டுச்சராசரி	மாணவர்களின் உயரம்
(3) இடைநிலையளவு	அதிக நிகழ்வெண்ணுள்ள மதிப்பெண்
(4) தொடர்ச்சியான மாறி	வரைபடம்
(5) முகடு	$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$

IV. (1) A என்ற கணம் $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ ஆகும். இவற்றின் உறுப்புகளை, எல்லாவிதமான இரட்டை உறுப்புகளாலும் (pairs) கிடைக்கும் கணமாக எழுது. A-ன் உறுப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி, ஒவ்வோர் இரட்டை உறுப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியின் கூட்டுச் சராசரியாகும் எனக் காட்டு. இந்த விதி, கணம்,

$B = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ -க்குப் பொருந்துமா ?

இதேபோல், மூன்றால் வகுபடும் எண்கள், 4 ஆல் வகுபடும் எண்கள் முதலியவற்றை உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணங்களுக்குப் பொருந்துமா எனக் கண்டுபிடி. இதிலிருந்து நீ என்ன தெரிந்து கொள்கிறாய் ?

[குறிப்பு : இரட்டை உறுப்புகளாலாகும் கணம் :

$\{(2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (4, 6),$
$(4, 8), (4, 10), (6, 8), (6, 10), (8, 10)\}$]

(2) மூன்று நாணயங்களைச் சுண்டும் பொழுது கிடைக்கக் கூடிய விடைகள் வருமாறு.

(தலை, தலை, தலை), (தலை, தலை, பூ),
(தலை, பூ, பூ), (பூ, தலை, பூ),
(தலை, பூ, தலை), (பூ, தலை, தலை,)
(பூ, பூ, தலை), (பூ, பூ, பூ)

அதாவது,

தலைகள்	0	1	2	3
நிகழ்வெண்	1	3	3	1

இதேபோல், நான்கு, ஐந்து நாணயங்களைச் சுண்டும் பொழுது கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை, அவற்றின் நிகழ்வெண் இவற்றை அட்டவணைப்படுத்து. முகடு, இடைநிலை அளவு இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(3) 1941-லிருந்து, 1971 வரை சராசரியில், ஒரு நாளில் சூரியன் ஒளி வீசிய நேரம் (மணியில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சூரியன் ஒளி வீசிய நேரத்தின் (மணியில்) கூட்டுச் சராசரி என்ன ?

ஜனவரி	பிப்ரவரி	மார்ச்சு	ஏப்ரல்	மே	ஜூன்
3·18	3·76	4·40	5·02	6·09	6·70
ஜூலை	ஆகஸ்டு	செப்டம்.	அக்டோ.	நவம்.	டிசம்பர்
5·82	5·47	1·89	1·51	1·34	2·31

(4) ஒரு வகுப்பிலுள்ள 100 மாணவர்களின் எடை பின் வருமாறு (கி கி).

பிரிவு	30 — 35	35 — 40	40 — 45	45 — 50	50 — 55
நிகழ்வெண்	3	29	41	21	6

மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி எடையைக் கண்டுபிடி. நிகழ்வுப் பல் கோணம் வரைந்து விளக்கு.

(5) சில இரும்புச் சாமான்களின் பழைய விலை, நிகழ்விலை, அவை பயன்படும் விகிதம் அடுத்த பக்கத்தில் கொடுக்கப்

பட்டுள்ளன. இரும்புச் சாமான்களின் விலை சராசரியில் எவ்வளவு அதிகரித்துள்ளது?

இரும்புச் சாமான்கள்	பழைய விலை	நிகழ் விலை	எடை
அலமாரி	100	130	1
நாற்காலி	100	102	5
சாய்வு நாற்காலி	100	114	2

(6) 200 ஊர்திகள், நெடுஞ்சாலையில் செல்லுகையில், பின்வரும் புள்ளி விவரம் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஊர்திகளின் வேகம் மணிக்கு கி மீ-ல்	40	50	60	70	80	90	100	110	120
ஊர்திகளின் எண்ணிக்கை	1	4	9	14	38	47	51	32	4

ஊர்திகளின் கூட்டுச் சராசரி வேகம், இடை நிலையளவு இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(7) திரு வெள்ளைச்சாமி என்பவர் கால்ப் (Golf) விளையாட்டில் தொடர்ந்து ஆடிய 25 ஆட்டங்களில் எடுத்த புள்ளிகளின் எண்ணிக்கைகள் பின்வருமாறு :

82, 92, 90, 87, 94, 89, 91, 88, 89, 95, 84, 99, 89
87, 90, 85, 86, 93, 91, 90 96, 92, 89, 88, 94

இப் புள்ளி விவரத்தின் நிகழ்வெண் அட்டவணை தயாரித்து, அவர் எடுத்த புள்ளிகளின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலையளவு, முகடு இவற்றைக் கண்டுபிடி.

12. அளவியல் (Mensuration)

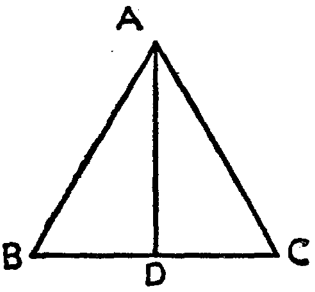
A. முக்கோணப் பகுதிகள்

§1. சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு காணல்

எடுகோள் : *ABC* என்பது ஒரு சமபக்க முக்கோணம்.

வரைதல் : *D*, $\overline{BC}$-ன் மையப் புள்ளி என்று கொள். *AD* ஐ இணை.

முக்கோணங்கள் *ABD*, *ACD* இவை சர்வ சமம் (காரணம் கூறு).



படம் 12-1.

ஆகவே, $\angle ADB \cong \angle ADC$ ஏன் ?

$$m\angle ADB + m\angle ADC = 180 \quad (\text{ஏன் ?})$$

$$\therefore \quad m\angle ADB = m\angle ADC = \frac{180}{2}$$

$$= 90$$

ஆகவே, *ABD* என்பது ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

இதில் $AB^2 = AD^2 + BD^2$ (பிதாகரசு தேற்றம்)

$$\therefore \quad AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$= AB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2$$

$$= AB^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

$$= \frac{3}{4}AB^2$$

$$\therefore \quad AD = \sqrt{\frac{3}{4}}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$$

முக்கோணம் ABC-ன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AD \text{ ச. அலகுகள்}$$

$AD \perp BC$. ஆகவே, AD என்பது முக்கோணத்தின் உயரம்

$$AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB$$

$$AB = BC$$

$$\therefore \quad AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times BC$$

$$\therefore \quad \text{பரப்பளவு} = \frac{1}{2} \times BC \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times BC \text{ ச. அலகுகள்}$$

(விவரி)

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} BC^2 \text{ ச. அலகுகள்}$$

BC என்பது சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒரு பக்க அளவு இதை 'a' என்று குறிப்பிட்டால், அதன் பரப்பளவு $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ சதுர அலகுகள்.

a அலகுகள் பக்கமுள்ள, சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2$ சதுர அலகுகள்.

குறிப்பு: (1) சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரம் $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ அலகுகள்.

(2) படத்தில் ABD என்ற முக்கோணத்தின் கோணங்கள் 30, 60, 90 (டிகிரியில்) அளவுள்ளவை. இக் கோணங்களுக்கு எதிர்ப்புறமுள்ள பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே, $\frac{1}{2} a$, $\frac{\sqrt{3}}{2} a$, a அலகுகள் உள்ளவை. அதாவது, ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் விகிதம் $1 : 2 : 3$ என்றால், இக் கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்கள், முறையே $\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$ அல்லது $1 : \sqrt{3} : 2$ என்ற விகிதத்தில் அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

6 செமீ பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு என்ன? $(\sqrt{3} \simeq 1{\cdot}732)$

சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 \text{ ச. அ.}$$

$$= \frac{1 \cdot 732}{4} \times 6 \times 6 \text{ ச. செமீ.}$$

$$= 1 \cdot 732 \times 3 \times 3 \text{ ச. செமீ.}$$

$$= 1 \cdot 732 \times 9 \text{ ச. செமீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரம் $\sqrt{3} \times 7$ செமீ. அதன் பரப்பளவு என்ன ?

சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரம் $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times a$ அலகுகள்.

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \times a = \sqrt{3} \times 7$$

$$\therefore a = 7 \times 2 \text{ செமீ.}$$

$$= 14 \text{ செமீ.}$$

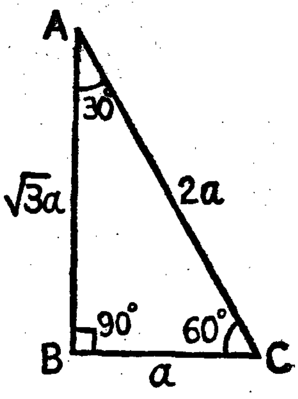
∴ இச் சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 \text{ ச. செமீ.}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14 \text{ ச. செமீ.}$$

$$= \sqrt{3} \times 7 \times 7 \text{ ச. செமீ.}$$

$$= \sqrt{3} \times 49 \text{ ச. செமீ.}$$



படம் 12-2.

எடுத்துக்காட்டு 3:

ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் 1 : 2 : 3 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. இம் முக்கோணத்தின் அதிக நீள முள்ள பக்கம் 8 செமீ. என்றால், மற்ற பக்கங்களின் நீளங்களைக் கண்டுபிடி.

இம் முக்கோணத்தின் கோணங்கள், 30, 60, 90 (டிகிரி) அளவுள்ளவை.

இம் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதம் $1 : \sqrt{3} : 2$. இவை முறையே, 30, 60, 90 அளவு கோணங்களின் எதிரில் அமையும். இப் பக்கங்களைப் படத்தில் காட்டியதுபோல் a, $\sqrt{3}\,a$, $2a$ என்று எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$2a = 8 \text{ செமீ.}$$

$$a = 4 \text{ செமீ.}$$

$$\sqrt{3} \cdot a = \sqrt{3} \times 4 \text{ செமீ.}$$

முக்கோணத்தின் மற்ற பக்கங்கள் :

$$4 \text{ செமீ.}, \quad \sqrt{3} \times 4 \text{ செமீ.}$$

பயிற்சி 12·1

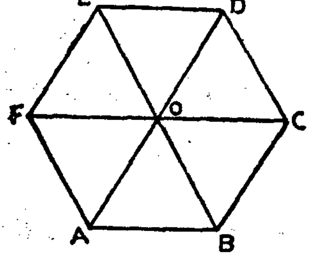
(1) (a) 5 செமீ, (b) 12 செமீ, (c) 10 செமீ பக்க அளவுகளுள்ள சமபக்க முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் யாவை ?

(2) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரம் $\sqrt{3}$ செமீ. முக்கோணத்தின் பரப்பளவு என்ன ?

(3) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $25\sqrt{3}$ ச. செமீ. முக்கோணத்தின் உயரம், பக்கம் இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(4) ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் 1 : 2 : 3 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. இம் முக்கோணத்தின் மிகச்சிறிய பக்க அளவு 6 செமீ என்றால், மற்ற பக்கங்களின் அளவுகளைக் கண்டுபிடி.

§2. ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் பரப்பளவு காணல்



படம் 12-3.

படத்தில் $ABCDEF$ என்பது ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணம். பக்கம் AB-ன் மேல், AOB என்ற சமபக்க முக்கோணத்தை, O என்ற புள்ளி அறுகோணத்தின் உள்ளே அமையுமாறு வரை. OC, OD, OE, OF இவற்றை இணை. $AB = a$ அலகுகள் என்று கொள்.

Δ AOB ஒரு சமபக்க முக்கோணம்.

$\therefore \quad AB = AO = BO = BC$

$\angle ABC$-ன் அளவு 120 (டிகிரியில்)

$\angle OBA$-ன் அளவு 60 „

$\therefore$ $\angle OBC$-ன் அளவு 60 „

$\angle BOC = \angle OCB = 60$ (டிகிரியில்)

$\therefore$ BOC ஒரு சமபக்க முக்கோணம்.

இதேபோல், COD, DOE, EOF, FOA இவை சமபக்க முக்கோணங்கள் என நிரூபிக்கலாம். ஆகவே, $ABCDEF$ என்ற ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் பரப்பளவு = 'a' அலகுகள் பக்கமாகவுடைய ஆறு சமபக்க முக்கோணங்களின் பரப்பளவு $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ சதுர அலகுகள்.

பயிற்சி 12·2

(1) 8 செமீ பக்கமுள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் பரப்பளவு யாது?

(2) ஓர் அரங்கம் 10 மீட்டர் பக்கமுள்ள ஒழுங்கான அறுகோண வடிவிலுள்ளது. அரங்கின் தரைப் பரப்பளவை இரண்டு தசம இடத்திற்குச் சரியாக ஏரில் (ares) கண்டுபிடி.

(3) ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் பரப்பளவு $24\sqrt{3}$ சதுர செமீ. அறுகோணத்தின் பக்கத்தைக் கண்டுபிடி.

(4) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரம் $6\sqrt{3}$ செமீ. இச் சமபக்க முக்கோணத்திற்கு சம பரப்பளவுள்ள ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் பக்கமென்ன ?

(5) ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் பக்கம் 7·5 செ. மீ. இவ்வறுகோணத்திற்குச் சமமான பரப்பளவுள்ள சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கத்தின் நீளத்தைக் கண்டுபிடி.

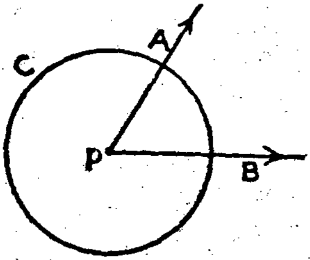
(6) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பு $\sqrt{3} \times 25$ சதுர செமீ. இம் முக்கோணத்தின் உயரத்திற்குச் சமமான பக்கமுள்ள ஒழுங்கான அறு கோணத்தின் பரப்பளவு என்ன ?

8. வட்டகோணப் பகுதிகள்

(Sectors)

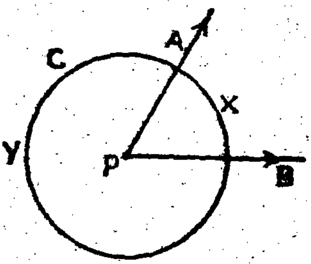
§1. வட்டமையக் கோணம்

ஒரு கோணத்தின் உச்சி, வட்டமையமொன்றில் அமையுமானால், அது வட்ட மையக் கோணமாகும். $\angle APB$ என்பது, வட்ட மையம் P ஐ உச்சியாகக் கொண்ட வட்ட மையக் கோணமாகும். $\angle APB$-ன் உட்புறமாக அமைந்திருக்கும் வளைவு (curve) சிறுவில் $\overset{\frown}{AB}$ ஆகும். வட்டத்தின் மீதமுள்ள வளைவு பெருவில் $\overset{\frown}{AB}$ ஆகும்.



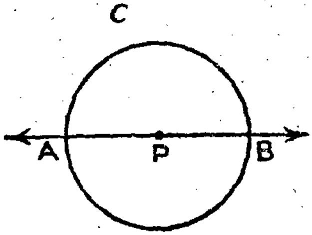
படம் 12-4.

P ஐ மையமாகக் கொண்ட, C என்ற வட்டத்தில் A, B என்பனவை வட்டத்தின் ஒரு விட்டத்தின் இரு முடிவுப் புள்ளிகளல்லாத, வேறு இரு புள்ளிகள் என்க. இப்பொழுது வட்டத்தின் சிறுவில் $\overset{\frown}{AB}$ என்பது A, B என்ற புள்ளிகள், மற்றும் $\angle APB$-ன் உட்புறத்தில் வட்டத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளிகள், இவற்றின் சேர்க்கையாகும்.



படம் 12-5.

பெருவில் $\overset{\frown}{AB}$ என்பது, A, B, மற்றும் $\angle APB$-ன் வெளிப்புறத்தில் வட்டத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளிகள் இவற்றின் சேர்க்கையாகும்.



படம் 12-6.

இரு வட்ட விற்களிலும் A, B இவைதாம் முடிவுப் புள்களாக அமையும்.

A, B என்ற புள்ளிகள் வட்டத்தின் ஏதேனுமொரு விட்டத்தின் முடிவுப் புள்ளிகளானால், நமக்குக் கிடைக்கும் விற்கள் ஒவ்வொன்றும் ஓர் அரை வட்டமாகும். படத்தில் (12-6) C என்பது

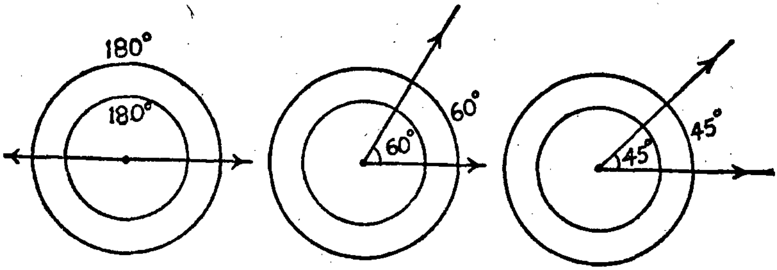
ஒரு வட்டம். A, B என்பது ஒரு விட்டத்தின் முடிவுப் புள்ளிகள்.

அரை வட்டம் $\overset{\frown}{AB}$ என்பது $\overleftrightarrow{AB}$ ஐ விளிம்பாகக் கொண்ட குறிப்பிட்ட அரைத்தளத்திலும், வட்டம் C-யிலுமாக அமையும் புள்ளிகள், A, B என்னும் புள்ளிகள் இவற்றின் சேர்க்கையாகும்.

ஒரு வட்டவில்லை $\overset{\frown}{AB}$ என்று குறிப்பிடும் பொழுது அது சிறு வில்லைக் குறிக்கிறதா, அல்லது பெரு வில்லைக் குறிக்கிறதா என்று தெளிவாக அறிந்து கொள்ள, A, B என்ற இரு புள்ளிகளைத் தவிர, அவ்வில்லில் அமையும் X என்ற மற்றொரு புள்ளியையும் குறித்துக் கொண்டு வில் $\overset{\frown}{AXB}$ என்று கூறலாம். படம் (12-5)-ல் $\overset{\frown}{AXB}$ என்பது சிறுவில், $\overset{\frown}{AYB}$ என்பது பெருவில்.

§2. வட்ட வில்லின் டிகிரி (கோண) அளவு

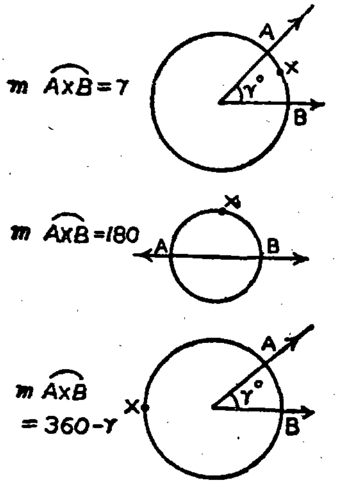
படங்களில் காட்டியுள்ளபடியே, வட்டவிற்களின் கோண (டிகிரி) அளவைக் குறிப்பிட வேண்டும். வட்டவில்லின் கோண



படம் 12-7.

(டிகிரி) அளவு வட்டத்தின் (ஆரத்தை) அளவைப் பொறுத்து மாறுவதில்லை. மேலே குறிப்பிட்டுள்ள, வட்ட வலயங்களின் ஒவ்வொரு வட்டவில்லும், ஒரே டிகிரி அளவுள்ளவைகளாகும். அதாவது, அவை, வட்ட மையத்தில் உட் கொள்ளும் கோண அளவுகள் சமமானவையாகும்.

(1) ஒரு சிறு வில்லின் (டிகிரி) அளவு அவ்வில், வட்ட மையத்தில் எதிர் கொள்ளும் கோண அளவாகும்.

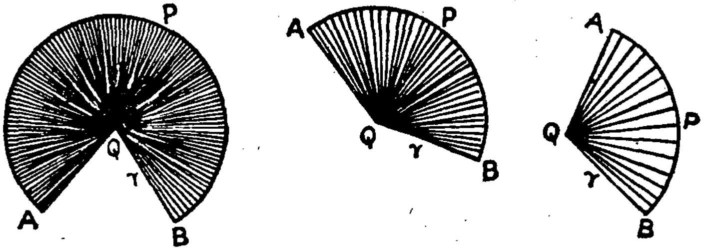


(2) ஒரு அரை வட்டத்தின் (டிகிரி) அளவு 180.

(3) ஓர் பெருவில்லின் (டிகிரி) அளவு = 360 — அதே முடிவுப் புள்ளிகளால் அமையும் சிறுவில்லின் டிகிரி அளவு.

படம் 12-8.

இனி வரும் கணக்குகளில் வில்லின் டிகிரி அளவு என்பது, வில் வட்ட மையத்தில் உட்கொள்ளும் கோண அளவு என்றே குறிப்பிடப்படும்.



படம் 12-9.

§ 3. வட்ட கோணப் பகுதி

இது படத்தில் காட்டியுள்ளது போல் அமையும் ஒரு வடிவம்.

$\widehat{AB}$ என்பது, Q என்ற புள்ளியை மையமாகவும், 'r' அலகுகள் ஆரமும் உடைய வட்டமொன்றின் வில் எனக.

P என்பது, $\widehat{AB}$-ல் அமையும் ஒரு புள்ளியானால் $\overline{QP}$ என்ற எல்லாக் கோட்டுத் துண்டுகளும் சேர்ந்த கணம், வட்ட கோணப்

பகுதி எனப்படும். $\overset{\frown}{AB}$ என்பது வட்ட கோணப் பகுதியின் வில். 'r' அதன் ஆரம். $\angle AQB$, வட்ட கோணப் பகுதியின் கோணம்.

ஒரு வட்டத்தில் அல்லது சம ஆரங்களுள்ள வட்டங்களில், விற்களின் நீளங்களும், இவ்விற்கள் வட்ட மையத்தில் உட்கொள்ளும் கோண அளவுகளும் நேர் விகிதத்தில் அமையும்.

ஒரு வட்டத்தின் பரிதியை, 360 டிகிரி அளவு கொண்ட ஒரு வில் என்று கொள்.

'r' அலகுகள் ஆரமுள்ள வட்டத்தின் பரிதியின் நீளம் C அலகுகள் என்க.

வில்லின் நீளம் l அலகுகள் கொண்ட வட்ட கோணப் பகுதி, வட்ட மையத்தில் உட்கொள்ளும் கோண அளவு x (டிகிரியில்) என்க.

$$\frac{l}{C} = \frac{x}{360}$$

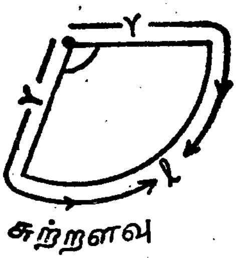
$$C = 2\pi r$$

$$\therefore \quad \frac{l}{2\pi r} = \frac{x}{360}$$

$$\therefore \quad l = \frac{x}{360} \times 2\pi r \text{ அலகுகள்.}$$

ஒரு வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம்

$$l = \frac{x}{360} \times 2\pi r \text{ அலகுகள்.}$$



படம் 12-10.

x என்பது வட்ட கோணப் பகுதியின் கோண அளவு ; r, அதன் ஆரம்.

குறிப்பு : வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு

= வில்லின் நீளம் + 2 ஆர அளவு

அதாவது, $P = l \div 2r$.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

10 செமீ ஆர அளவுள்ள ஒரு வட்ட கோணப் பகுதியின் கோண அளவு 60 (டிகிரியில்). வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளமென்ன ? வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு என்ன ? ($\pi = 3 \cdot 14$)

வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம்

$$l = \frac{x}{360} \times 2\pi r$$

$$= \frac{60}{360} \times 2 \times 3 \cdot 14 \times 10$$

$$= \frac{31 \cdot 4}{3} = 10 \cdot 46 \text{ செமீ.}$$

வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு

$$P = l + 2r = 10 \cdot 46 + 20 = 30 \cdot 46 \text{ செமீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

100π செ.மீ. பரிதியுள்ள வட்டத்திலிருந்து வெட்டிய பகுதியின் வில்லின் நீளம் $16\frac{2}{3}\pi$ செமீ என்றால், வட்ட கோணப் பகுதியின் கோண அளவு என்ன ?

வட்ட கோணப் பகுதியின் கோண அளவு x என்றால்,

$$\frac{x}{l} = \frac{360}{C}$$

$$l = 16\tfrac{2}{3}\pi, \quad C = 100\pi$$

$$\therefore \frac{x}{16\frac{2}{3}\pi} = \frac{360}{100\pi}$$

$$\therefore x = \frac{360 \times 16\frac{2}{3}\pi}{100\pi} = \frac{360 \times 50\pi}{100\pi \times 3} = 60$$

வட்ட கோணப் பகுதியின் கோண அளவு = 60.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

346·5 ச. செமீ பரப்பளவுள்ள வட்டத்திலிருந்து கோண அளவு 60 உள்ள வட்ட கோணப் பகுதி வெட்டியெடுக்கப்படுகிறது. வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம், சுற்றளவு இவற்றைக் கண்டுபிடி. $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

வட்டத்தின் ஆரம் 'r' செமீ என்று கொள்.

வட்டத்தின் பரப்பளவு $= \pi r^2$

$$\frac{22}{7} r^2 = 346 \cdot 5$$

$$r^2 = \frac{7}{22} \times 346 \cdot 5^{15 \cdot 75}$$

$$= 7 \times 7 \times 2 \cdot 25$$

$$\therefore \quad r = 7 \times 1 \cdot 5$$

$$= 10 \cdot 5 \text{ செ.மீ.}$$

வட்ட கோணப் பகுதியின் கோண அளவு 60.

வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம்

$$l = \frac{x}{360} \times 2\pi r$$

$$= \frac{60}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \cdot 5^{3 \cdot 5}$$

63

$$= 11 \text{ செமீ.}$$

வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு $P = l + 2r$

$$= 11 + 2 \times 10 \cdot 5$$

$$= 11 + 21$$

$$= 32 \text{ செமீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

ஒரு வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு $2\pi + 10$ செமீ. கோண அளவு 72. வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளமென்ன ?

வட்ட கோணப் பகுதியின் ஆரம் r செமீ என்க.

வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம் l செமீ என்க.

வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு $P = l + 2r$.

$$l = \frac{x}{360} \times 2\pi r$$

$$= \frac{72}{360} \times 2\pi r$$

$$= \frac{2}{5} \pi r \text{ செமீ.}$$

$$\therefore \quad P = l + 2r = \frac{2}{5} \pi r + 2r$$

$$= \frac{2\pi r + 10r}{5}$$

இது $2\pi + 10$ என்று தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad 2\pi r + 10r = 5\,(2\pi + 10)$$

அதாவது $r\,(2\pi + 10) = 5\,(2\pi + 10)$

ஆகவே $r = 5$ செமீ.

இப்பொழுது வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம்

$$l = \frac{2}{5} \pi r$$

$$= \frac{2}{5} \times \pi \times 5$$

$$= 2\pi \text{ செமீ.}$$

பயிற்சி 12·3

(1) கோடிட்ட இடங்களில் விட்டுப்போன விவரங்களைத் தரவும். $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

	வ. கோ. பவின் ஆரம்	கோண அளவு	வில்லின் நீளம்	சுற்றளவு
(a)	7 செமீ.	120	———	———
(b)	21 செமீ.	30	———	———
(c)	———	———	22 செமீ.	64 செமீ.
(d)	———	———	11 செமீ.	32 செமீ.
(e)	14 செமீ.	———	22 செமீ.	———
(f)	28 செமீ.	———	22 செமீ.	———
(g)	———	90	———	12·5 செமீ.
(h)	———	135	———	$16\frac{7}{11}$ செமீ.

(2) கோண அளவு 45-ம், வில்லின் நீளம் 3π அலகுகளும் உள்ள ஒரு வட்ட கோணப் பகுதி, ஒரு வட்டத்திலிருந்து வெட்டி யெடுக்கப்படுகிறது. அவ் வட்டத்தின் ஆரமென்ன ?

(3) ஒரு வட்டத்திலிருந்து, கோண அளவு 72-ம், வில்லின் நீளம் 4π அலகுகளுமுள்ள வட்ட கோணப்பகுதியொன்று வெட்டியெடுக்கப்படுகிறது. அவ்வட்டத்தின் ஆரமென்ன ?

(4) கோண அளவு 60 உள்ள வட்ட வில்லின் நீளம் 1 செமீ. என்ருல், அதன் ஆரமென்ன ?

(5) மணிக் கூண்டொன்றில் வைக்கப்பட்டிருக்கும் கடியார மொன்றின் நிமிட முள்ளின் நீளம் 30 செமீ. 5 நிமிடத்தில் நிமிட முள்ளின் முனை கடக்கும் தூரமென்ன ? ஒரு நிமிடத்தில் கடக்கும் தூரமென்ன ? $(\pi \simeq 3\cdot14)$

(6) வட்ட கோணப் பகுதியொன்றின் கோண அளவு 90, சுற்றளவு 17·85 செமீ. வட்ட கோணப் பகுதியின் ஆரம், வில்லின் நீளம் இவற்றைக் கண்டுபிடி. ($\pi \simeq 3 \cdot 14$)

(7) ஒரு வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு 45·12 செ.மீ கோண அளவு 144. வட்ட கோணப் பகுதியின் ஆரம், வில்லின் நீளம் இவற்றைக் கண்டுபிடி. ($\pi \simeq 3 \cdot 14$)

(8) ஒரு வட்டத்தின் பரிதி 44 செமீ. இவ்வட்டத்திலிருந்து, கோண அளவு 108 உள்ள, வட்ட கோணப் பகுதி வெட்டியெடுக்கப்படுகிறது. வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு என்ன? $\pi \simeq \frac{22}{7}$

(9) 314 ச. செமீ. பரப்பளவுள்ள வட்டமொன்றிலிருந்து கோண அளவு 45 உள்ள வட்ட கோணப் பகுதி வெட்டியெடுக்கப்படுகிறது. இவ் வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு என்ன? ($\pi \simeq 3 \cdot 14$)

(10) 125π செ. மீ. பரிதியுள்ள வட்டத்திலிருந்து வெட்டியெடுக்கப்பட்ட வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம் 25π செமீ என்றால், வட்ட கோணப் பகுதியின் கோண அளவு, ஆரம், சுற்றளவு இவற்றைக் கண்டுபிடி.

§ 4. வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு

வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம், அவ்வில் வட்ட மையத்தில் உட்கொள்ளும் கோண அளவைப் பொறுத்து நேர் விகிதத்தில் மாறுவதைப்போல், அதன் பரப்பளவும், அவ்வில் வட்ட மையத்தில் உட்கொள்ளும் கோண அளவிற்கு நேர் விகிதத்தில் உள்ளது.

ஒரு வட்டத்தை, 360 கோண அளவை உட்கொள்ளும் வில்லாகக் கொள்க.

A, x என்பது முறையே வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு, கோண அளவு என்று கொள்க.

இப்பொழுது,

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{x}{360}$$

$$\therefore \quad A = \frac{x}{360} \times \pi r^2$$

இதையே $A = \frac{x}{360} \times \pi r \times r$ என்று எழுதலாம்.

இப்பொழுது $A = \frac{x}{360} \times \frac{2\pi r}{2} \times r$ சதுர அலகுகள்.

$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{360} \times 2\pi r\right) \times r$ ச. அலகுகள்.

$= \frac{1}{2} \times l \times r$ சதுர அலகுகள்.

$= \frac{1}{2} l r$ சதுர அலகுகள்.

அதாவது வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு காண, வில்லின் நீளமும் ஆரமும் கொடுக்கப்பட்டால்,

$$A = \frac{1}{2} l r$$ என்ற சூத்திரத்தையும்,

கோண அளவும் ஆரமும் கொடுக்கப்பட்டால்,

$$A = \frac{x}{360} \pi r^2$$ என்ற சூத்திரத்தையும்

பயன்படுத்த வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

கோண அளவு (டிகிரியில்) 72-ம், ஆரம் 7 செமீ உள்ள வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு என்ன ?

வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு

$$A = \frac{x}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{72}{360} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

5

$$= \frac{154}{5} = 30{\cdot}8 \text{ ச. செமீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம் 8 செமீ. ஆரம் 6 செமீ. பரப்பளவு என்ன ?

வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு

$$A = \frac{1}{2} lr$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 5$$

$$= 4 \times 5 = 20 \text{ ச. செமீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

கோண அளவு (டிகிரியில்) 108-ம், வில்லின் நீளம் 18·84 செமீ-ம் உள்ள, வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு என்ன ? அதன் சுற்றளவு என்ன ? ($\pi \simeq 3 \cdot 14$)

இக் கணக்கில், வில்லின் நீளமும், கோண அளவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, பரப்பளவு காண, இரு சூத்திரங்களில் ஒன்றைப் பயன்படுத்தி, வட்ட கோணப்பகுதியின் ஆரம் கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.

ஆகவே, $l = \frac{x}{360} \times 2\pi r$ என்ற சூத்திரத்தின் உதவியால் 'r' கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

ஆகவே, $18 \cdot 84 = \frac{108}{360} \times 2 \times 3 \cdot 14 \times r$

$$\therefore \quad r = \frac{18 \cdot 84 \times 360}{108 \times 2 \times 3 \cdot 14} = 10 \text{ செமீ.}$$

(வெட்டுதல்: மேலே 2, 6, 10; கீழே 36)

$\therefore$ வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு

$$A = \frac{1}{2} lr$$

$$= \frac{1}{2} \times 18 \cdot 84 \times 10 \quad (9 \cdot 42)$$

$$= 94 \cdot 2 \text{ ச. செமீ.}$$

வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு

$$P = l + 2r$$
$$= 18{\cdot}84 + 20$$
$$= 38{\cdot}84 \text{ செமீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

கோண அளவு 54 உள்ள வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு 23·1 ச. செமீ. வட்ட கோணப் பகுதியின் ஆரம் கண்டுபிடித்து, அதன் மூலம் வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவையும் கண்டுபிடி.

வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு

$$A = \frac{x}{360} \times \pi r^2$$

அதாவது $23{\cdot}1 = \frac{54}{360} \times \frac{22}{7} \times r^2$

$$\therefore \quad r^2 = \frac{23{\cdot}1 \times 7 \times 360}{54 \times 22}$$

$$= 7 \times 7$$

$$\therefore \quad r = 7 \text{ செ. மீ.}$$

வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம்

$$l = \frac{2A}{r}$$

$$= \frac{2 \times 23{\cdot}1}{7}$$

$$= 6{\cdot}6 \text{ செமீ.}$$

$\therefore$ வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு

$$P = l + 2r$$
$$= 6{\cdot}6 + 14 = 20{\cdot}6 \text{ செமீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

கோண அளவு 72 உள்ள வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு 22·8 செமீ. அதன் பரப்பளவு என்ன? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம்

$$l = \frac{x}{360} \times 2\pi r$$

$$= \frac{72^1}{360_5} \times 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$= \frac{44}{35} r \text{ செமீ.}$$

வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு

$$P = l + 2r$$

$$= \frac{44}{35} r + 2r = \frac{114}{35} r$$

ஆகவே $\frac{114}{35} r = 22 \cdot 8$

$$r = \frac{35}{114} \times 22 \cdot 8^{\cdot 2}$$

$$= 7 \text{ செமீ.}$$

ஆனால் $l + 2r = P$

ஆகவே $l + 14 = 22 \cdot 8$

$$\therefore \ l = 22 \cdot 8 - 14$$

$$= 8 \cdot 8 \text{ செமீ.}$$

வட்டகோணப் பகுதியின் பரப்பளவு

$$A = \frac{1}{2} lr = \frac{1}{2} \times 8 \cdot 8 \times 7$$

$$= 30 \cdot 8 \text{ ச. செமீ.}$$

பயிற்சி 12·4

(1) கோடிட்ட இடங்களில் விட்டுப்போன விவரங்களைத் தரவும்.

வ. கோ. ப. கோணம்	ஆரம்	பரப்பளவு
(a) 60	10 செமீ.	———
(b) 120	14 செமீ.	———
(c) 45	———	154 ச. செமீ.
(d) 90	———	616 ச. செமீ.
(e) ———	7 செமீ.	30·8 ச. செமீ.
(f) ———	15 செமீ.	58·875 ச. செமீ. $\pi = 3 \cdot 14$

வில்லின் நீளம்	ஆரம்	பரப்பளவு
(g) 8 செமீ.	6 செமீ.	———
(h) 10 செமீ.	10 செமீ.	———
(i) ———	7 செமீ.	28 ச. செமீ.
(j) ———	4·8 செமீ.	14·4 ச. செமீ.
(k) 7 செமீ.	———	35 ச. செமீ.
(l) 13·2 செமீ.	———	66 ச. செமீ.

(2) 7 செமீ. ஆரமும், 45 கோண அளவுமுள்ள வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு, சுற்றளவு இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(3) ஒரு வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு 25 செமீ. வில்லின் நீளம் 11 செமீ. வட்டகோணப் பகுதியின் ஆரத்தைக் கண்டுபிடித்து, அதன் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி.

(4) ஒரு வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு 36 செமீ. ஆரம் 14 செமீ. வட்டகோணப் பகுதியின் பரப்பளவு என்ன ?

(5) கோண அளவு 60 உள்ள வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு 76·8 செமீ. வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு என்ன ?

(6) கோண அளவு 108 உள்ள வட்டகோணப் பகுதியின் பரப்பளவு 92·4 ச. செமீ. வட்ட கோணப் பகுதியின் ஆரம் என்ன ? அதன் வில்லின் நீளம், சுற்றளவு இவற்றைக் காண்.

(7) 2 அலகுகள் ஆரமுள்ள வட்டமொன்றிலிருந்து வெட்டியெடுக்கப்பட்ட வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு π ச. அலகுகள் என்றால், அதன் கோண அளவு என்ன ?

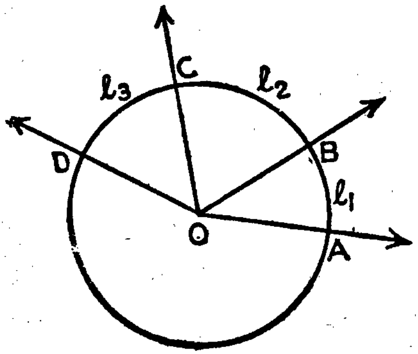
(8) 6 அலகுகள் ஆரமுள்ள வட்டமொன்றிலிருந்து வெட்டியெடுக்கப்பட்ட வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு 15π ச. அலகுகள் என்றால், அதன் வில்லின் நீளமென்ன ?

(9) 1 அலகு ஆரமுள்ள வட்டமொன்றிலிருந்து வெட்டியெடுக்கப்பட்ட வட்ட கோணப் பகுதியொன்றின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}$ ச. அலகுகள் என்றால், வட்ட கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம், கோண அளவு இவற்றைக் கண்டுபிடி.

C. கோணங்கள்

முதல் முறை

1 அலகு ஆரமுள்ள வட்டமொன்று வரைந்து, வட்டத்தின் பரிதியில், *A*, *B*, *C*, *D* என்ற புள்ளிகளை அமைத்து, இவற்றை வட்ட மையம் '*O*' வுடன் சேர். இப்பொழுது வட்ட விற்கள் *AB*, *BC*, *CD* இவை, வட்ட மையம் *O*வில் $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ இவற்றை உட்கொள்ளுகின்றன. வட்ட விற்களால் வட்ட மையத்தில் உட்கொள்ளப்படும் கோணங்கள், இவ் வட்ட விற்களின் நீளங்களுக்கு நேர் விகிதத்திலுள்ளன என்பது வெளிப்படை. ஆகவே, இப்பொழுது 1 அலகு ஆரமுள்ள இவ் வட்டத்தின் மையத்தில் உட்கொள்ளப்பட்டுள்ள, $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ முதலிய கோணங்களை முறையே இவ்



படம் 12-11.

வட்ட விற்களின் நீளங்கள் l_1, l_2, l_3 ஐக் கொண்டு அளவிடலாம். இவ்வாறு 1 அலகு ஆரமுள்ள வட்டத்தில், l_1, l_2, l_3 அலகுகள் நீளமுள்ள வட்டவிற்கள் உட்கொள்ளும் கோணங்களின் அளவுகள் முறையே, l_1, l_2, l_3 ரேடியன் அலகுகள் என்போம். இதன்படி, 1 அலகு ஆரமுள்ள வட்டத்தில் 1 அலகு நீளமுள்ள வட்டவில் உட்கொள்ளும் கோணம் **ஒரு ரேடியன்** ஆகும்.

$\pi \simeq \frac{22}{7}$ என்று கொண்டால்,

$\frac{22}{7} \times 1$ [ரேடியன் அளவில்] $= 180$ (டிகிரியில்)

$$\therefore \; 1 \text{ ரேடியன்} = \frac{7}{22} \times 180^\circ$$

$$= \frac{1260}{22} = 57\frac{3}{11}^\circ$$

$$= 57^\circ\,16'\,22''.$$

(சுமார்)

இதேபோல் $180^\circ = \frac{22}{7}$ ரேடியன்

$1^\circ = \frac{22}{7} \times \frac{1}{180}$ ரேடியன்

$= \frac{11}{630}$ ரேடியன்

$= 0{\cdot}0174$ ரேடியன்

பயிற்சி 12·5

(1) பின் வரும் அளவுகள் ரேடியன் அலகில் உள்ளன, ஒவ்வொன்றையும் டிகிரியில் காண்க.

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{24}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$$

(2) பின் வரும் கோண அளவுகள் ஒவ்வொன்றையும் ரேடியனில் கணக்கிடுக.

15, 75, 45, 60, 30, 120, 150, 210, 300, 330.

(3) சில வட்ட கோணப் பகுதிகளின், ஆரம், வில்லின் நீளம் இவைகள் பின்வருமாறு. ஒவ்வொன்றின் கோணத்தையும் ரேடியனில் கணக்கிடு.

ஆரம்	6 செமீ.	15 செமீ.	12·5 செமீ.	3 செமீ.	10 செமீ.
வில்லின் நீளம்	3 செமீ	10 செமீ.	25 செமீ.	9 செமீ.	15 செமீ.

சோதனைத்தாள் (அளவியல்)

பகுதி 1. [நேரம் : 1 மணி

I. கோடிட்ட இடத்தைச் சரியான விவரங்களைக் கொண்டு நிரப்பு.

(1) ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் 1 : 2 : 3 என்ற விகிதத்திலிருந்தால், இக் கோணங்களின் எதிர் பக்கங்களின் நீளங்களின் விகிதம் ———

(2) ஓர் அறுகோணத்தின் பரப்பளவைக் காண ——— என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

(3) 1 அலகு ஆரமுள்ள வட்டத்தில், 1 அலகு நீளமுள்ள வட்டவில் எதிர்கொள்ளும் கோண அளவு ———.

(4) ஒரு வட்ட கோணப் பகுதியின் ஆரம் $\frac{1}{2}d$ செமீ. வில்லின் நீளம் l செமீ என்றால் அதன் பரப்பளவு ——

(5) ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் முறையே 3 செமீ., 4 செமீ., 5 செமீ. அதன் பரப்பளவு ——

II. பின் வருவனவற்றைச் சரியா, தவறு எனக் கண்டுபிடி.

(1) ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் 1 : 1 : 2 என்ற விகிதத்திலிருந்தால், அக் கோணங்களின் எதிர் பக்கங்கள் 1 : 1 : 2 என்ற விகிதத்திலிருக்கும்.

(2) ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் ஒவ்வொரு கோண அளவும் 60 (டிகிரியில்) ஆகும்.

(3) 1 அலகு பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{\sqrt{3}}{4}$ சதுர அலகுகளாகும்.

(4) ஒரு ரேடியன் அளவு டிகிரியில் 180 ஆகும்.

(5) 'r' அலகுகள் ஆரமும், l அலகுகள் வில்லின் நீளமும் உள்ள வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு $l + 2r$ அலகுகள்.

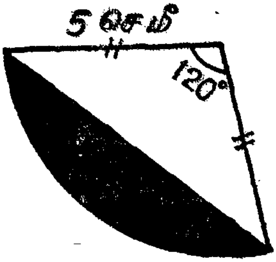
III. கீழே, இரு நிரல்களிலும் கொடுத்துள்ள விவரங்களைச் சரியாக இணைத்து எழுது.

(1) a, b, c அலகுகள் பக்கமாகவுள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பளவு	$180°$
(2) கோண அளவு x-ம், ஆரம் r அலகுகளுமுள்ள வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு	$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
(3) π ரேடியன்	$\frac{\sqrt{3}}{2} \times a$
(4) a பக்கமுள்ள சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரம்	$\sqrt{3} \times s$
(5) $\sqrt{\frac{2s}{3}}$ அலகுகள் பக்கமுள்ள ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் பரப்பளவு	$\frac{x}{360} \times \pi r^2$

பகுதி 2.

(1) ஒரு வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு 64 செமீ, ஆரம் 21 செமீ. வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு, கோணம் இவற்றைக் கண்டுபிடி.

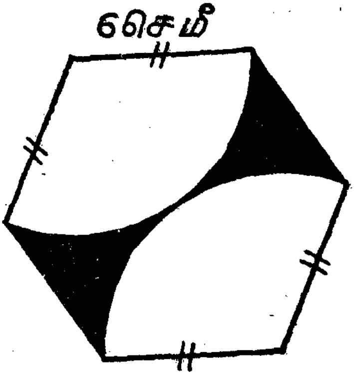
(2) ஒரு சதுரத்தின் பக்கம் 6 செமீ. சதுரத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமமான பரப்பளவும், பக்கத்திற்குச் சமமான வில்லின் நீளமும் உள்ள வட்ட கோணப் பகுதி, வட்ட மையத்தில் உட்கொள்ளும் கோண அளவை ரேடியனில் கண்டுபிடி.



படம் 12-12.

(3) படத்தில் நிழல் படுத்திய இடத்தின் பரப்பளவைக் கண்டு பிடி.

$\pi \simeq 3{\cdot}14$, $\sqrt{3} \simeq 1{\cdot}732$.



படம் 12-13.

(4) படத்தில் (ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணம்) நிழல் படுத்திய இடத்தின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி.

$\pi \simeq 3{\cdot}14$, $\sqrt{3} \simeq 1{\cdot}732$.

13. வடிவியல்

I. மீள்பார்வை

(முதல் பகுதி)

§1. புள்ளி, கோடு, தளம் இவை அடிப்படைக் கருத்துகள்

நம்மைச் சுற்றியுள்ள இடத்தை வெளி (space) என்கிறோம். இது கணக்கற்ற புள்ளிகளின் கணமாகும். ஒவ்வொரு கோட்டிலும் பல புள்ளிகள் உள்ளன. இவ்வாறுன பல கோடுகள் உள்ளன. ஒரு தளத்தில் பல புள்ளிகள் உள்ளன. இவ்வாறாக பல தளங்கள் உள்ளன. இத்தகைய புள்ளிகளின் கணம் ஒவ்வொன்றும், 'வெளி' (space) என்று சொல்லப்படும் அனைத்துப் புள்ளிகளின் கணத்தின் உட்கணம் ஆகும்.

§2. புள்ளி, கோடு, தளம் இவை பற்றிய அமைப்புப் பண்புகளை (incidence properties) முன் வகுப்புகளில் படித்தீர்கள்.

பரிசோதனை மூலம் அடியில் கண்டுள்ள பண்புகள் உங்களால் பெறப்பட்டுள்ளன :

(1) கொடுத்துள்ள இரு தனித்த புள்ளிகளின் வழியே செல்லுமாறு ஒரேயொரு கோடு உள்ளது.

(2) ஒவ்வொரு தளத்திலும் ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகளேனும் உள்ளன. வெளியானது (space) குறைந்த பட்சம், ஒரே தளத்திலமையாத நான்கு புள்ளிகளையேனும் கொண்டுள்ளது.

(3) ஒரு கோட்டின் மேலுள்ள இரு தனித்த புள்ளிகள் ஒரு தளத்தில் இருந்தால், அக் கோடு முழுமையும் அத் தளத்திலே இருக்கும்.

(4) ஒரு தளத்திலுள்ள வெவ்வேறான இரு கோடுகளுக்கு ஒரேயொரு பொதுப் புள்ளி இருக்கலாம்; அல்லது பொதுப் புள்ளிகளே இல்லாமலுமிருக்கலாம்.

(5) ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் ஒரே ஒரு தளத்தை நிறுவுகின்றன.

(6) இரு (தனித்த) தளங்களுக்கு ஒரு பொதுப் புள்ளி யேனும் இருக்குமாயின், அவற்றின் பொதுப் புள்ளிகளைத்தும் ஒரு கோட்டிலமையும்.

(7) ஒரு கோடும் ஒரு தளமும் (i) பொதுப் புள்ளிகளற்று இருக்கலாம். அல்லது (ii) ஒரேயொரு பொதுப் புள்ளியைப் பெற்றிருக்கலாம். அல்லது (iii) ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பொதுப் புள்ளிகளைப் பெற்றிருக்கலாம்.

இப் பண்புகளுடன், இன்னும் சில பண்புகளையும் நாம் அறிவோம். எடுத்துக்காட்டாக, மூன்றாவது பண்பிலிருந்து, ஒரு தளத்தை, பல கோடுகளாலாகிய கணமாகவும் கருதலாம் என்று தெரிகிறது. ஐந்தாவது மூன்றாவது பண்புகளிலிருந்து இரு வெட்டும் கோடுகளின் வழியே செல்லுமாறு ஒரேயொரு தளம் உள்ளது என்றறியலாம். ஐந்தாவது, முதலாவது பண்பு களிலிருந்து, கொடுத்துள்ள ஒரு கோட்டின் வழியாகவும், அக் கோட்டின் மேலமையாத, கொடுத்துள்ள ஒரு புள்ளியின்

வழியாகவும் செல்லுமாறு ஒரேயொரு தளம் உள்ளது என்று அறிய முடிகிறதா ?

பின்வரும் கணக்குகள் மீள்பார்வைக்கு உதவும்.

பயிற்சி 13·1

(மீள்பார்வை)

கோடிட்ட இடங்களைச் சரியாய் நிரப்புக :

(1) கோடு, தளம், வெளி இவை ——— கணம்.

(2) வெளி என்பதன் ஓர் உட்கணம் ———, மற்றோர் உட்கணம் ———

(3) இரு கோடுகள் வெட்டிக் கொண்டால், அவை ——— வெட்டிக் கொள்ளும்.

(4) இரு தளங்கள் வெட்டிக் கொண்டால், அவை ஒரு ——— வெட்டிக் கொள்ளும்.

(5) ஒரு கோடு ——— புள்ளிகளாலும், ஒரு தளம் ஒரே கோட்டில் அமையாத ——— புள்ளிகளாலும் தீர்மானிக்கப்படும்.

(6) (i) ஒரு புள்ளியின் வழியே ——— கோடுகள் வரைய முடியும்.

(ii) ஒரு கோட்டின் வழியே ——— தளங்கள் வரைய முடியும்.

(iii) ஒரு தளத்தின் மேல் ——— கோடுகளை வரைய முடியும்.

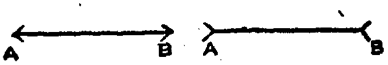
(iv) வெளியானது ——— தளங்களை அடங்கியது.

(7) ஒரு கோட்டின் வழியே பல ——— அமையும் ; ஆனால் ஒரே கோட்டில்லாத மூன்று புள்ளிகளின் வழியே ஒரே ஒரு ——— அமையும்.

(8) ஒரு கோட்டின் இரு புள்ளிகள் ஒரே தளத்தில் அமைந்தால், அந்த கோடு முற்றிலும் ——— அமையும்.

(9) ஒரு தளத்தில் அமையாத ஒரு கோடு, அந்த தளத்தை வெட்டினால், அவற்றின் வெட்டு ———.

§ 3. வடிவங்களைப் பற்றிய தன்மைகளைப் பெரும்பாலும் செய்முறையிலும், காகித மடிப்பினாலும், கருவிகளைக் கொண்டு அளத்தல் மூலமும் தெரிந்து கொண்டோம். இம் முறை சிறந்த வழிகாட்டியாகும். ஆனாலும், அளவைகளை மிகத் துல்யமாகக் கண்டுபிடிக்க முடியும் என்று சொல்ல முடியாது; சிறிய பிழைகள் ஏற்படலாம். அதிலிருந்து தன்மைகளின் உண்மையைப் பற்றிய நிச்சய உணர்வு பாதிக்கப்படலாம். இவ்வாறே தான், முற்றிலும் பார்வையை மாத்திரம் நம்பி நாம் முடிவுக்கு வருவதும். எடுத்துக்காட்டாக படம் 13-1-ல் உள்ள இரு கோடுகளும் சம அளவு உள்ளதா? பார்ப்பதற்கு இல்லைபோல் தோன்றும்.



படம் 13-1.

ஆகவே, இத்தகைய முறைகளை, வெறும் வழிகாட்டிகளாகக் கொள்ள முடியுமே தவிர, உண்மைகளை நிறுவுவதற்கு இவை பயன்படா உண்மைகளை நிலைநாட்ட, காரணம் - விளைவு என்ற அடிப்படையில் தருக்க முறையையே பின்பற்ற வேண்டும். இம் முறையில் வடிவ கணிதத்தைப் படிப்பதை 'அறிமுறை வடிவியல்' (Theoretical Geometry) என்று கூறுகிறோம்.

அறிமுறை வடிவியலில், வரையறுக்கப்படாத சொற்கள் புள்ளி, கோடு, தளம் என்பன. '— ன் மேலமைகிறது', '— ன் வழியே செல்கிறது' என்ற சொற்றொடர்களும் வரையறுக்கப் படாதவையாகவே கொள்ளப்படும். மேலே கொடுத்துள்ள ஏழு[1] பண்புகளும் (பக்கம் 303) அடிப்படை உண்மைகளாகக் (அடிகோள்களாக) கொள்ளப்படும். இவற்றிலிருந்து, தருக்க முறையில் பல புதிய உண்மைகளைத் தேற்றங்களாக நிறுவ முடியும். இத் தேற்றங்களின் தொகுப்பை 'அமைப்பு வடிவியல்' (Incidence Geometry) என்று கூறுவர்.

அமைப்பு வடிவியலில் ஒரு தேற்றம் நிருபணத்துடன் தரப் பட்டுள்ளது.

தேற்றம் : ஒவ்வொரு தளத்திலும், ஒரே புள்ளி வழியே செல்லாத மூன்று தனித்த கோடுகள் உள்ளன.

---

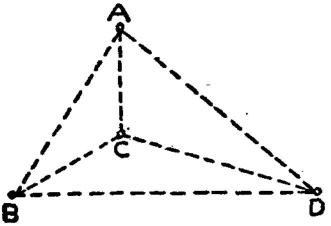
[1] இவை ஏழும் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவையல்ல. எடுத்துக்காட்டாக 6 ஆவது வாக்கியம் மற்ற வாக்கியங்களைக் கொண்டே நிறுவப்படக் கூடியது.

நிரூபணம் :

விவரணம்	காரணம்
(i) தளத்தில் ஒரே கோட்டிலமையாத A, B, C என்ற மூன்று புள்ளிகளுள்ளன.	அடிகோள் 2
(ii) $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ என்ற கோடுகள் அத் தளத்திலுள்ளன.	அடிகோள் 3
(iii) $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{BC}$	இல்லாவிடில் C ஆனது $\overleftrightarrow{AB}$ மேலிருக்கும்.
(iv) இவ்வாறே $\overleftrightarrow{BC} \neq \overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AC} \neq \overleftrightarrow{AB}$	
(v) $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ தனித்த கோடுகள்.	(iii), (iv)
(vi) இவை ஒரு புள்ளி வழியே செல்லா.	இவை இரண்டிரண்டாக வெட்டும் புள்ளிகள். A, B, C தனித்தவை

§ 4. அமைப்பு வடிவியலில் புள்ளி, கோடு, தளம் ஆகியவையும், அவற்றிடையேயுள்ள உறவுகளும் வரையறுக்கப்படாதவையாகையால், அவற்றிற்குப் பல வகையில் விளக்கம் கொடுத்து, அதற்கிசைந்த தேற்றங்களை அடையலாம்.

படத்தில் A, B, C, D என்ற நான்கு புள்ளிகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. இவை ஒரு வெளியை நிறுவுவதாகக் கொள்ளலாம். $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{C, D\}$, $\{B, D\}$ ஆகிய கணங்களைக் கோடுகள் என்றும், $\{A, B, C\}$, $\{B, C, D\}$, $\{C, D, A\}$, $\{D, A, B\}$ ஆகிய கணங்களைத் தளங்கள் என்றும் வரையறுத்தோம். ஆனால் மேற் கூறிய ஏழு அடிகோள்களையும் இவ் வரையறைகள் சரி செய்வதைக் காண்க. இவ் வடிவியலில் நான்கே புள்ளிகள் உள்ளன. ஆகவே, இதற்கு நான்கு-புள்ளி-வடிவியல் என்று பெயர்.



படம் 13-2.

A, B, C, D என்பன நான்கு மரங்கள் என்று கொள்க. இவற்றில் இரு மரங்களுக்கு ஒரு சிறுமி தண்ணீர் பாய்ச்சுவதாகக் கொள்க. எடுத்துக்காட்டாக, A, B என்ற மரங்களுக்கு ஒரு சிறுமி தண்ணீர் பாய்ச்சுகிருள்; A, C என்ற இரு மரங்களுக்கு வேமெரு சிறுமி தண்ணீர் பாய்ச்சுகிருள். இச் சிறுமிகளை முறையே {A, B}, {A, C} என்று குறிப்பிட்டால், இவ்விதம் மொத்தம் ஆறு சிறுமியர்கள் இருப்பது தெரிய வரும்.

அடுத்தபடியாக மூன்று மரங்களுக்கொருவர் வீதம் காவலாளிகள் நியமிக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்க. எடுத்துக்காட்டாக, A, B, C என்ற மரங்களுக்கொரு காவலாளியும், B, C, D என்ற மரங்களுக்கு வேருெரு காவலாளியும் உள்ளனர். இவர்களை முறையே {A, B, C}, {B, C, D} என்று குறிப்பிட்டால் மொத்தம் நான்கு காவலாளிகள் இருப்பது தெரிய வரும்.

{A, B} ⊂ {A, B, C} என்ற கணித உறவுக்கு "{A, B} என்ற சிறுமி தண்ணீர் பாய்ச்சும் மரங்களை {A, B, C} என்பவன் காவல் புரிகிருன்" என்று விவரணம் தந்தால், மேற் கூறிய அடிகோள்கள் தகுந்தபடி, மரம், சிறுமி, காவலாளிகளைப் பற்றிய வாக்கியங்களாக ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக ஆருவது அடிப்படை உண்மை, "இரு காவலாளிகள் சேர்ந்து ஒரு மரத்தைக் காத்தால், அவர்கள் சேர்ந்து காக்கும் எல்லா மரங்களுக்கும் ஒரே சிறுமியே தண்ணீர் பாய்ச்சுகிருள்" என்ருகும். இந் நிலையில் நான்கு—புள்ளி—வடிவியல், மரங்கள்—சிறுமியர்—காவலர் பற்றிய அறிவியல் ஆகிவிடுகிறது! § 3-ல் நிரூபிக்கப் பட்ட தேற்றத்தின்படி, ஒரு காவலாளி காக்கும் மரங்களுக்கு மட்டும் தண்ணீர் பாய்ச்சுபவரும், ஆனல் ஒரு மரத்திற்கே நீர்ப் பாய்ச்சாதவருமாக சிறுமியர் மூவர் உள்ளனர் என்ற விவரத்தைப் பெறுகிருேம்.

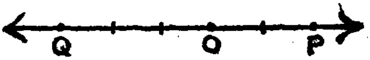
§ 5. நான்கு புள்ளி—, ஏழு புள்ளி—வடிவியல் இருப்பதிலிருந்து நாம் அறியும் ஒரு முக்கியமான உண்மை நாம் ஏற்கெனவே கண்டறிந்த வடிவியல் தேற்றங்களனைத்தையும் நிறுவுவதற்கு அமைப்பு வடிவியலின் அடிகோள்கள் மட்டும் போதா என்பதாகும். ஆகவே, இவற்றுடன் தேவையான இன்னும் சில அடிகோள்களை ஆங்காங்குச் சேர்த்துக்கொள்ளப் போகிருேம். அவற்றில் சில இங்குத் தரப்பட்டுள்ளன.

அடிகோள் 8: இரு தனித்த புள்ளிகளுக்கு இசைவாக ஒரு மிகையெண் உள்ளது. இம் மிகை யெண்ணை, அப் புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் என்று குறிப்பிடுவோம்.

அடிகோள் 9: ஒரு கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளின் கணத்திற்கும், மெய்யெண்—கணத்திற்குமிடையே ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தம் உள்ளது. இதன்படி, இரு புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம், அப் புள்ளிகளுக்கிசைந்த மெய்யெண்களின் வித்தியாசத்தின் தனிமதிப்பாகும்.

(i) :

(ii) :



படம் 13-3.

P, Q என்பன இரு புள்ளிகள். படம் 13-3 (i)-ல் இவற்றுக் கிசைவான எண்கள் முறையே 3, 5.

எனவே $PQ = |5 - 3|$.

படம் 13-3 (ii)-ல் *P, Q*-க்குக் கிசைவான புள்ளிகள் 2, – 3

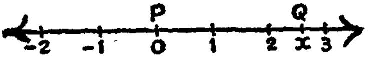
எனவே $PQ = |-3-2| = 5$.

9ஆம் அடிகோளிலிருந்து, ஒரு கோட்டில் கணக்கிலடங்காப் புள்ளிகள் உள்ளன என்பதை அறிகிறோம்.

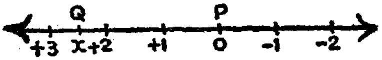
நான்கு-புள்ளி வடிவியலில் ஒரு கோட்டில் எத்தனை புள்ளிகள் இருக்கின்றன ?

9ஆம் அடிகோளில் கூறப்பட்ட ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தம் பல விதங்களில் செய்யப்படலாம். குறிப்பாக, *P, Q* என்ற

(i) :



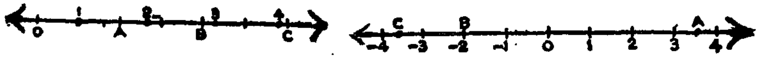
(ii) :



படம் 13-4.

இரு புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், $\overleftrightarrow{PQ}$ என்ற கோட்டில் *P*-க்கு இசைவாக பூச்சியத்தையும், *Q*-க்கு இசைவாக ஒரு மிகை எண்ணையும் எடுத்துக் கொள்ள முடியும். இதையே ஓர் அடிப்படை உண்மையாகக் கூறுவதுமுண்டு.

9ஆம் அடிகோளிலிருந்து மற்றொரு முக்கியக் கருத்து வெளிப்படுகிறது. *A*, *B*, *C* என்ற மூன்று புள்ளிகள் தரப்பட்டிருந்தால், எப்பொழுது *B* ஆனது *A*-க்கும் *C*-க்கு மிடையேயுள்ளது என்று கூறுவோம்?



(i) (ii)

படம் 13-5.

இப் படங்களிலிருந்து நாம் அறிவதை, அறிமுறை வடிவியலில் வரையறையாகக் கூறுகிறோம்.

வரையறை : 9 ஆம் அடிகோளில் கூறிய ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தத்தில், ஒரு கோட்டின் மேலுள்ள *A*, *B*, *C* என்ற மூன்று புள்ளிகளுக்கிசைந்த மூன்று மெய்யெண்களில், *B*-க்கு இசைந்த எண், மற்ற இரு புள்ளிகளுக்கிசைந்த எண்களுக்கிடையே அமைந்திருந்தால், *B* ஆனது *A*-க்கும் *C*-க்கும் இடையே உள்ள புள்ளி எனப்படும். இதனை *A—B—C* என்றோ *C—B—A* என்றோ சுட்டிக் காட்டுவோம்.

இப்போது, கோட்டுத் துண்டு, கதிர், கோணம், அரைக் கோடு, முக்கோணம், பல்கோணம் ஆகிய சொற்கள் நன்கு வரையறுக்கப்படுகின்றன. இவ் வரையறைகளை நீங்கள் ஏற்கெனவே கீழ் வகுப்புகளில் படித்திருக்கிறீர்கள். அவற்றை இப்போது நினைவுபடுத்திக்கொள்ளவும்.

பயிற்சி 13·2

(1) வரையறை தருக.

கோட்டுத்துண்டு, கதிர், கோணம், முக்கோணம்.

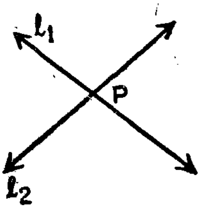
கோடிட்ட இடங்களைச் சரியாய் நிரப்புக :

(2) $\longleftrightarrow$ இது ——— க்குக் குறியீடு. இதில் இரு அம்புக் குறிகளும் ——— என்பதைக் காட்டுகின்றன.

(3) ஒரு கோட்டில் ஒரு புள்ளி குறித்தால், அது கோட்டை இரு ———.

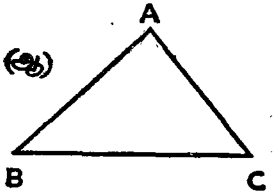
(4) $\overline{PQ}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{PQ}$, முறையே ———, ———, ——— என்பவற்றைக் குறிக்கின்றன.

(5) விடுபட்ட இடங்களைச் சரியாய் நிரப்பு :

(அ) 

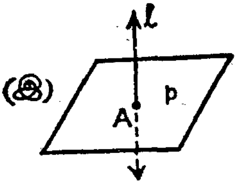
$l_1 \cap l_2 =$ ———

படம் 13-6.

(ஆ) 

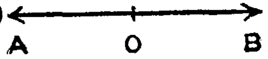
$\Delta\ ABC =$ ——— $\cup$ ——— $\cup$

படம் 13-7.

(இ) 

$p \cap l =$ ———.

படம் 13-8.

(6) (அ) 

$\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ ஒவ்வொன்றும் ——— எனப்படும்.

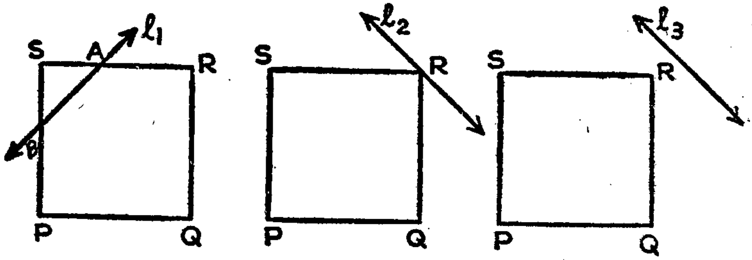
படம் 13-9.

படம் 13-10.

(ஆ) $\overline{AB} \cup \overline{BC}$ என்ன ? (ஈ) $\overline{AC} \cap \overline{BD}$ என்ன ?

(இ) $\overline{AC} \cap \overline{CD}$ என்ன ? (உ) $\overline{AB} \cap \overline{CD}$ என்ன ?

(7) ஒவ்வொரு படத்திலும் சதுரம், கோடு இவற்றின் வெட்டுதல் என்ன ?



படம் *13-11.*

(8) கீழ்க்காணும் அளவு சட்டத்தில் *A, B, C, D*-ன் அச்சுத் தூரம் (co-ordinate) என்ன ?

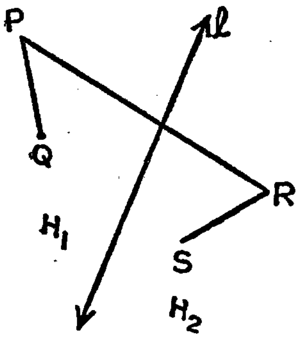
படம் *13-12.*

(9) P, Q என்பவை இரு புள்ளிகளானால், அவற்றைக் கொண்டு நான்கு வெவ்வேறு வடிவங்களைக் குறிக்கலாம் என்பதைப் படங்களுடன் விளக்குக.

(10) கோணங்களின் வகைகள், முக்கோணங்களின் வகைகள், இவற்றைத் தகுந்த உதவிப் படங்களுடன் விவரிக்க.

§ 6. ஒரு கோட்டை, அதன்மீதுள்ள புள்ளியொன்றின் மூலம் இரு அரைக் கோடுகளாகப் பிரிப்பதைப் போல, ஒரு தளத்தை அதன் மீதுள்ள ஒரு கோட்டினால் இரு அரைத் தளங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

P, Q என்பன l-க்கு ஒரு புறம் உள்ள புள்ளிகள். $\overline{PQ}$-ன் புள்ளிகளனைத்தும் அதே புறத்திலிருப்பதைக் காண்க. $\overline{PQ}$-க்கும், l-க்கும் வெட்டுப் புள்ளிகள் இல்லையென்பதைக் கவனிக்க. $\overline{PR}$-க்கும், l-க்கும் ஒரு வெட்டுப் புள்ளி இருப்பதைக் காண்க.



படம் 13-13.

இவ்வாறே, R, S, என்பன l-க்கு ஒரே புறமுள்ள இரு புள்ளிகள். இங்கும் $\overline{RS}$-ன் புள்ளிகளனைத்தும் l-ன் ஒரே பக்கத்திலிருப்பதையும் $\overline{RS} \cap l = \phi$ என்பதையும் கவனிக்க. இவற்றை அறிமுறை வடிவியலில் அடியிற்கண்ட அடிகோளாகக் கொள்வோம்.

அடிகோள் 10 : ஒரு தளமும் அதன்மீது ஒரு கோடும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அக் கோட்டின் மீதமையாத, ஆனால் அத் தளத்திலுள்ள, மற்ற புள்ளிகளின் கணம் இரு உட்கணங்களாகப் பின்வரும் நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு பிரிக்கப்படும்.

(i) P, Q என்பன ஒரே உட்கணத்தின் புள்ளிகள் எனில், $\overline{PQ}$-ன் எல்லாப் புள்ளிகளும் அவ்வுட்கணத்தின் புள்ளிகளாகும்.

(ii) P ஓர் உட்கணத்திலும், Q மற்றோர் உட்கணத்திலும் இருப்பின், $\overline{PQ}$-க்கும் கொடுத்துள்ள கோட்டுக்கும் ஒரு வெட்டுப் புள்ளியுள்ளது.

வரையறை : இத்தகைய உட்கணங்கள் அரைத்தளங்கள் எனப்படும். கொடுத்துள்ள கோடு, இவை ஒவ்வொன்றிற்கும் ஓரம் (Edge) எனப்படும். இக் கோட்டைப் பொறுத்து, இரு அரைத் தளங்களும் இரு எதிர்ப் பக்கங்கள் என்று கூறப்படும்.

10ஆம் அடிகோளைக் கொண்டு ஒரு கோணத்தின் உட்புறத்தை வரையறுக்கலாம்.

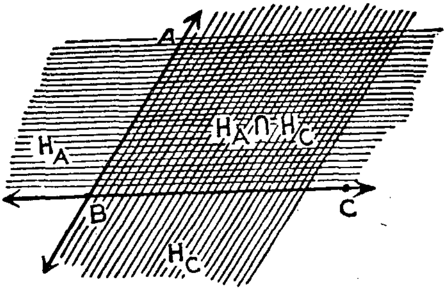
$\angle ABC$-க்கு $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ என்பன புயங்களல்லவா ?

$\overleftrightarrow{BA}$-க்கு C—புறம்,

$\overleftrightarrow{BC}$-க்கு A—புறம்

ஆகியவற்றின் வெட்டு

$\angle ABC$-ன் உட்புறம் எனப்படும்.



படம் 13-14.

§ 7. கோணங்களை அளத்தல், வரைதல் முதலியன உங்களுக்குத் தெரிந்த செயல்களே. அறிமுறை வடிவியலில் இவற்றைச் சில அடிகோள்கள் மூலம் தெரிந்துகொள்வோம்.

அடிகோள் 11 : பாகைமானி அடிகோள் : ஒவ்வொரு கோணத்திற்கும் இசைவாக 0-க்கு மேல் 180-க்குள்ளாக அமைந்துள்ள ஒரு மெய் எண்ணைக் காண முடியும்.

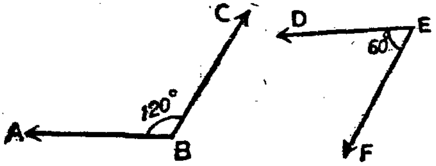
வரையறை : இவ்வாறு காணக் கிடைக்கும் எண்ணுக்கு அக் கோணத்தின் அளவு என்று பெயர்.

$\angle ABC$ என்ற கோணத்தின் அளவு x எனில் $m(\angle ABC) = r$ என்றோ, அல்லது '' $\angle ABC$-ன் அளவு (டிகிரியில்) r '' என்றோ எழுதுவோம்.

அடிகோள் 12 : H எனும் அரைத்தளத்திற்கு AB என்பது ஓரம் என்க. $\overrightarrow{AB}$ ஐ ஒரு பக்கமாகவும், அளவு (டிகிரியில்) r இருக்குமாறும் ஒரே ஒரு கோணத்தை H-ல் வரைய முடியும்.

அடிகோள் 13 : $\angle ABC$-ன் உட்புறத்தில் D என்பது ஏதேனுமொரு புள்ளியெனில், $m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$

வரையறை : இரு கோணங்களின் அளவுகளின் (டிகிரியில்) கூட்டுத் தொகை 180 எனில் அக் கோணங்கள் **மிகை நிரப்புக் கோணங்கள்** (Supplementary angles) எனப்படும்.



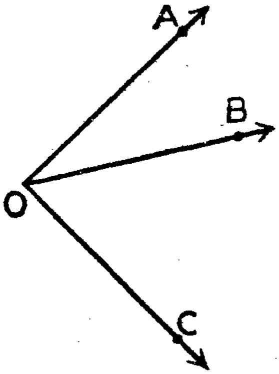
படம் 13-15.

படத்தில் $\angle ABC$-ம் $\angle DEF$-ம் மிகை நிரப்புக் கோணங்கள்.

வரையறை : இரு கோணங்களுக்கு ஒரு பொதுப் புயம் இருந்து அவற்றின் மற்ற புயங்கள் பொதுப் புயத்திற்கு எதிர்ப் புறங்களில் இருந்தால், அக் கோணங்கள் அடுத்துள்ள கோணங்கள் (Adjacent angles) எனப்படும்.

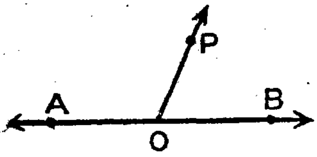
படத்தில் $\angle AOB$, $\angle BOC$ என்பன அடுத்துள்ள கோணங்கள்.

$\angle AOB$, $\angle AOC$ என்பன அடுத்துள்ள கோணங்களாகா. ஏன்?



படம் 13-16.

வரையறை : இரு கோணங்களுக்கு ஒரு பொதுப் புயம் இருந்து, அவற்றின் மற்றிரு புயங்களும் ஒரே கோட்டிலுள்ள வெவ்வேறு கதிர்களாக இருந்தால், அக் கோணங்கள் **கோட்டுக் கோண சோடிகள்** (Linear pair) எனப்படும்.

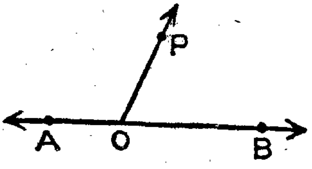


படம் 13-17.

படத்தில் $\angle AOP$, $\angle POB$ என்பன கோட்டுக் கோண சோடிகள். இங்கு OA, OB என்பன ஒரே கோட்டிலுள்ள வெவ்வேறு கதிர்கள்.

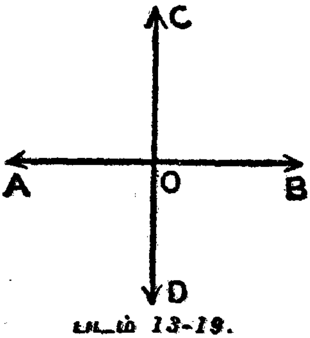
அடிகோள் 14 : கோட்டுக் கோண சோடிகள் மிகை நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

படத்தில் $m\angle AOP + m\angle POB = 180$.



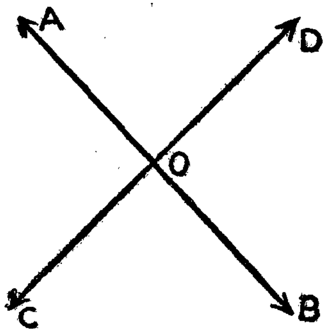
படம் 13-18.

§ 8. (i) காகிதத்தில் $\overleftrightarrow{AB}$ என்ற ஒரு கோடு வரைந்து அதில் O என்ற ஒரு புள்ளியைக் குறிப்போம். O-ல் காகித மடிப்பின் மூலம் $\overrightarrow{OA}$-ன் மீது $\overrightarrow{OB}$ படியுமாறு வைத்து $\overleftrightarrow{CD}$ என்ற கோடு கண்டுபிடிப்போம். $\angle BOC$, $\angle COA$ என்பன கோட்டுக் கோண சோடி. அவற்றின் டிகிரி அளவு எண்களின் மொத்தம் 180. ஆனல் $\angle BOC$, $\angle COA$ சர்வ சமம். (ஏன்?) ஆகையால் ஒவ்வொன்றும் ஒரு செங்கோணம்.



படம் 13-19.

(ii) $\angle AOD$, $\angle BOC$ இவற்றின் அமைப்பைக் கவனிப்போம். $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ஒன்றுக்கொன்று நேர் எதிர்க் கதிர்கள். $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OC}$ ஒன்றுக் கொன்று நேர் எதிர் கதிர்கள். இவ்வாறு ஒரு சோடி கோணங்களின் புயங்கள் அமைந்திருந்தால், அவை குத்தெதிர்க் கோண சோடிகள் (Vertical pair) எனப்படும். படத்தில் $\angle AOC$, $\angle DOB$ மற்றொரு குத்தெதிர்க் கோண சோடி.



படம் 13-20.

ஒவ்வொரு குத்தெதிர்க் கோண சோடிகளின் டிகிரி அளவு எண்ணைப் பாகைமானியைக் கொண்டு கண்டுபிடித்தால், அவை சமமாகக் காணப்படும். இதிலிருந்து நாம் தெரிந்து கொள்வதாவது:

தேற்றம் 1.

குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சர்வசமம்.

நிருபணம் :

$\angle AOD$, $\angle DOB$ என்பன கோட்டுக் கோண சோடிகள் என்பதால்,

$$m\angle AOD + m\angle DOB = 180$$

$\angle DOB$, $\angle BOC$ என்பனவும் கோட்டுக் கோண சோடிகள் என்பதால்,

$$m\angle DOB + m\angle BOC = 180$$

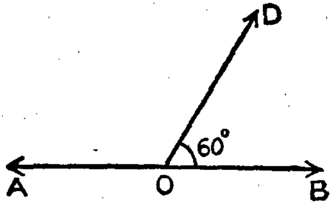
எனவே $m\angle AOD = m\angle BOC$

அதாவது $\angle AOD \equiv \angle BOC$

இத் தேற்றத்தின் உண்மையை, முதலில் படங்களின் மூலமாகவோ, பரிசோதனை மூலமாகவோ அறிந்தோம். பிறகு தருக்க முறையில் நிரூபணம் தந்துள்ளோம்.

இம் மாதிரியே இனிவரும் தேற்றங்களுக்கும் நிரூபணங்கள் தர இயலும். ஆயினும், சிலவற்றிற்கே இப் புத்தகத்தில் நிரூபணம் தரப்பட்டுள்ளது. மற்றவற்றிற்கும் உன்னால் முடிந்தால் நிரூபணம் தர முயன்று பார்.

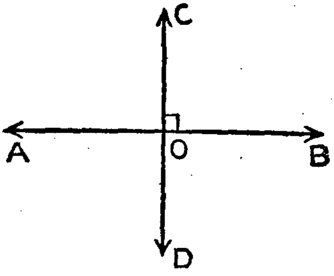
பயிற்சி 13·3



படம் 13-21.

(1) படத்திலிருந்து $\angle AOD$-ன் அளவு என்ன என்று சொல். ஆதாரத்தைக் கூறு.

(2) $\angle BOC$ ஒரு செங் கோணம். படத்திலுள்ள மற்ற ஒவ்வொரு கோணமும் செங் கோணம் என நிரூபிக்க.



படம் 13-22.

(3) மிகை நிரப்புக் கோணங்கள், நிரப்புக் கோணங்கள், அடுத்துள்ள கோணங்கள், கோட்டுக் கோண சோடி, குத்தெதிர்க் கோண சோடி, இவற்றை வரையறுத்து தகுந்த உதவிப் படங்களும் வரைக.

(4) ஒரு கோணத்தின் டிகிரி அளவு எண் α என்றால், மிகை நிரப்புக் கோணத்தின் டிகிரி அளவு என்ன ?

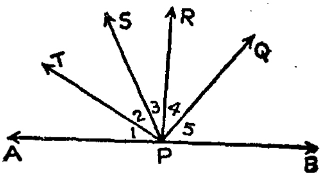
(5) ஒரு கோணமும் அதன் மிகை நிரப்புக் கோணமும் சர்வ சமம். அதன் டிகிரி அளவு என்ன ?

(6) எந்தக் கோணம் அளவில் அதன் மிகை நிரப்புக் கோண அளவில் பாதிக்குச் சமமாகும் ?

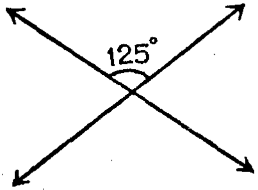
(7) ஒரு கோணமும் அதன் மிகை நிரப்புக் கோணமும் (a) 1 : 2, (b) 2 : 3 என்ற விகித அளவில் இருந்தால், அவற்றைக் கணக்கிடுக.

(8) 1 : 1 என்ற விகித அளவு எண்கள் கொண்ட மிகை நிரப்புக் கோணங்கள் யாவை ?

(9) அடுத்துள்ள படத்தில் 1, 2, 3, 4, 5 என்று எண்ணிட்டுள்ள கோண அளவுகளின் மொத்தம் என்ன ? இதை எவ்வாறு நிரூபிக்கலாம் ?



படம் 13-23.



படம் 13-24.

(10) (i) அடுத்துள்ள படத்திலுள்ள மற்ற ஒவ்வொரு கோண அளவும் என்ன ?

(ii) ஒரு கோண அளவு r என்றால், மற்ற ஒவ்வொரு கோண அளவும் என்ன ?

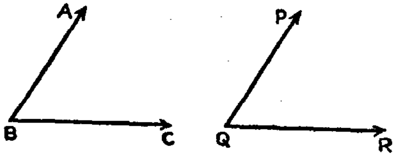
II. சர்வசமம்

§ 1. (a) $\overline{AB}$ ஐ $\overline{CD}$-ன் மீது, A ஐ C-ன் மீதும் பொருத்தி, $\overrightarrow{AB}$ ஐ $\overrightarrow{CD}$-ன் மீது விழுமாறு செய். B என்னும் புள்ளி D-ன் மீது பொருந்தினால் $\overline{AB}$-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியும், $\overline{CD}$-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியுடனும் ஒன்றொன்று பொருந்தும். இந் நிலையில் $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ சர்வ சமம் என்கிறோம். இதைக் குறிக்கும் முறை $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

இங்கு $AB = CD$ என்பதைக் காண்க. $\overline{PQ} \equiv \overline{RS}$ என்றால், தகுந்த முறையில் $\overline{PQ}$ ஐ $\overline{RS}$-ன்மீது முற்றிலும் பொருந்துமாறு வைக்கலாம் என்று பொருள். கோட்டுத் துண்டுகள் $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ அளவில் சமம் என்று பொருள்படும்.

ஒன்றின்மீது ஒன்றை முற்றிலும் பொருத்துதல் என்பது "சர்வ சமம்" (Congruence) என்பதன் அடிப்படைக் கருத்து. இதை அனுபவ முறையில் நாம் அறிகிறோம். அறிமுறை வடிவியலில் இவ்விதம் பொருந்துதல் என்பது வரையறுக்கப் படாத கருத்தாகையால், இதனைப் பின்வருமாறு வரையறுப் போம்.

வரையறை : இரு கோட்டுத் துண்டுகளின் நீளங்கள் சமமெனில், அக் கோட்டுத் துண்டுகள் சர்வ சமம் எனப்படும்.



படம் 13-25.

(b) $\angle ABC$ ஐ, $\angle PQR$ மீது, B ஐ Q-ன் மீது விழுமாறும், $\overrightarrow{BC}$ ஐ $\overrightarrow{QR}$-ன் மீதும், மேலும் $\overrightarrow{BA}$-யும், $\overrightarrow{QP}$-யும் $\overleftrightarrow{QR}$-க்கு ஒரே பக்கத்திலிருக்குமாறும் பொருத்திவை. $\overrightarrow{BA}$ ஆனது $\overrightarrow{QP}$-ன் மீது விழுந்தால், $\angle ABC \equiv \angle PQR$.

$\angle ABC \equiv \angle PQR$ எனில், $m\angle ABC = m\angle PQR$ என்பதைக் காண்க.

இதனின்று நாம் பின்வரும் வரையறையைப் பெறலாம்:

வரையறை : இரு கோணங்களின் அளவு (டிகிரி) சமமானால் அக் கோணங்கள் இரண்டும் சர்வசமம்.

[குறிப்பு: இங்குக் கோட்டுத் துண்டுகளின் சர்வசமம் என்னும் பிரச்சினை எழவில்லை.]

(c) ஒரு வடிவம், மற்றொன்றின்மீது முற்றிலும் பொருந்துதல் என்பது அவ்விரு வடிவங்கள் சர்வசமம் என்பதற்குப் பொருள். எடுத்துக்காட்டு: இரு அரை ரூபாய் நாணயங்கள்.

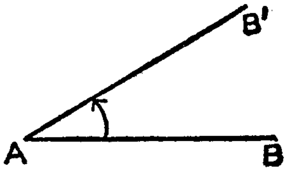
(b) ஒத்த வடிவங்களுக்கிடையேதான் சர்வசமம் ஏற்படும். எடுத்துக்காட்டாக, இரு சதுரங்களுக்கிடையே, சர்வசமம் உண்டு. ஒரு சதுரத்திற்கும் ஒரு முக்கோணத்திற்கும் இடையே சர்வ சமத்தை ஆராய்வது பொருளற்றது. சர்வ சமத்திற்கு வடிவ ஒற்றுமை மாத்திரம் இருந்தால் போதாது. அளவுகளும் சமமாக இருக்கவேண்டும். இதைப்பற்றி விவரமாகக் கீழே காண்போம்.

ஒரு முக்கோணத்திற்கும் ஒரு சதுரத்திற்கும் சர்வசமம் என்பதற்குப் பொருளே இல்லை.

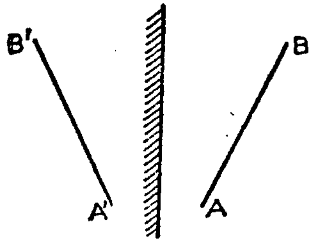
§2. பொருத்துதல் முறை என்பது சர்வசமம் என்பதற்கு அடிப்படைச் செயல் என்றோம்.

(a) ஒன்றின்மீது ஒன்றைப் பொருத்துதல் என்னும்போது, ஒன்றை அதனிடத்திலிருந்து நகர்த்துதல் என்னும் செயல் அடங்கி இருக்கிறது. இவ்வாறு செய்யும்போது, வடிவ மாற்றம் அல்லது அளவு மாற்றம் ஏதும் இல்லை என்று நாம் கொள்கிறோம்.

(b) $\overline{AB}$ ஐ A ஐப் பற்றிக் கொண்டு சுழற்றி, $\overline{AB'}$-க்குக் கொண்டு வந்தால் $\overline{AB} \equiv \overline{AB'}$



படம் 13-26.



(c) $\overline{AB}$ என்னும் கோட்டுத் துண்டு, கண்ணாடியில் $\overline{A'B'}$ என்ற பிம்பத்தைத் தருகிறது எனில், $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.

படம் 13-27.

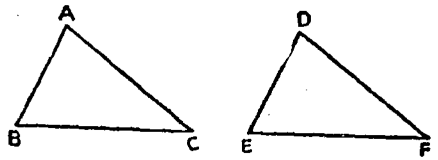
நகர்த்தல், சுழற்றல், பிரதிபலனம் என்ற கருத்துகளைக் கொண்டும் அனுபவ முறையில் சர்வ சமம் என்னும் கருத்தை நாம் புரிந்து கொள்ளலாம்.

(d) $\overline{AB}$ ஐ $\overline{CD}$-ன் மீது A ஐ C-ன் மீது ஒன்றுக் கொன்று பொருத்தலில் (One-to-one-correspondence) தொடர்பு படுத்தினல் இதை $A \leftrightarrow C$ என்று குறிப்பிடுகிறேம்.

(i) $B \leftrightarrow D$ என்றல், (ii) $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{CD}$ என்றல் என்ன பொருள் ?

(e) வடிவங்களின் சர்வசமம் என்னும் தன்மையைச் சோதிக்க, ஒன்றின் நகல் (Copy) எடுத்து, மற்றென்றுடன் வைத்துப் பார்க்கலாம். ஒரு கோட்டுத் துண்டின் அளவைக் கவராயத்தில் எடுத்துக் கவராயத்தை மற்றென்றின் மீது வைத்து அளவுகள் சமமா அல்லது ஒன்று மற்றென்றைவிடச் சிறியதா என்று சொல்லவும் முடியும். அளவுகளும் சர்வ சமத்திற்கு அடிப்படை.

§3. இனி 'இரு முக்கோணங்களின் சர்வ சமம்' என்பதை ஆராய்வோம்.



படம் 13-28.

ஒன்றின்மீது ஒன்றைப் பொருத்துதல் என்னும் அடிப்படையில் நாம் ஆராய்ச்சியைத் தொடங்குவோம்.

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகளை மற்றென்றின் மூன்று உச்சிகளோடு, பின்வரும் 6 முறைகளில் ஒன்றுக்கொன்று பொருத்துதல் ஏற்படுத்தலாம்.

(a) $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$

(b) $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow E$

(c) $A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow D$, $C \leftrightarrow F$

(d) $A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow D$

(e) $A \leftrightarrow F$, $B \leftrightarrow D$, $C \leftrightarrow E$

(f) $A \leftrightarrow F$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow D$

இவற்றால் ஏற்படும் பொருத்தல்கள் முறையே :

(a) $ABC \leftrightarrow DEF$ (b) $ABC \leftrightarrow DFE$

(c) $ABC \leftrightarrow EDF$ (d) $ABC \leftrightarrow EFD$

(e) $ABC \leftrightarrow FDE$ (f) $ABC \leftrightarrow FED$

என்று குறிக்கப்படும்.

இவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்று (எடுத்துக்காட்டாக $ABC \leftrightarrow DEF$ என்ற ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தல் தொடர்பானது) இசைந்த பக்கங்களும் கோணங்களும் சர்வசமம், அதாவது,

$$\overline{AB} \equiv \overline{DE}, \quad \overline{BC} \equiv \overline{EF}, \quad \overline{AC} \equiv \overline{DF},$$

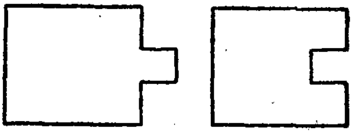
$$\angle A \equiv \angle D, \ \angle B \equiv \angle E, \ \angle C \equiv \angle F$$

என்ற உண்மைகளைக் கொடுக்குமானால், இவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வ சமம் என்று கூறுகிறோம்.

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ என்று இதைச் சுருக்கமாகக் குறிக்கின்றோம்.

[குறிப்பு : ஒத்த சோடி உச்சிகள், பக்கங்கள், கோணங்கள் சேருவதைக் கவனிக்கவும்.]

§ 4. இவ்விரு வடிவங்களிலும், ஒத்த பக்க சோடி அளவுகள், ஒத்த சோடி கோண அளவுகள் சமம். மூலைகளின் எண்ணிக்கைகள் சமம். எனினும் வடிவங்கள் சர்வ சமமில்லை. (ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தல் முறையில் சோதிக்க). எனவே முக்கோணமில்லாத பல் கோணங்களுக்கிடையே சர்வ சம உறவை வரையறுக்க, மேற் கூறியவை போதா. ஆயினும் முக்கோணங்களுக்கு நம் வரையறை நன்கு பொருந்தும்.



படம் 13-29.

§ 5. S என்பது தளத்திலுள்ள முக்கோணங்களனைத்தையும் கொண்ட கணம் என்க.

S-ல் a, b என்பன ஏதேனும் இரு உறுப்புகள் (a, b என்பன ஒவ்வொன்றும் ஒரு முக்கோணம்). S-ல் R எனும் ஓர் உறவை, பின்வருமாறு வரையறுக்க :

'' முக்கோணம் $a \equiv$ முக்கோணம் b எனில், $a R b$. ''

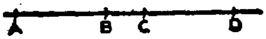
R என்பது ஒரு சமான உறவு (Equivalence relation) என்பதைச் சரி பார்க்கலாம். (முதல் அத்தியாயம், பக்கம் 23 பார்க்க).

பயிற்சி 13·4

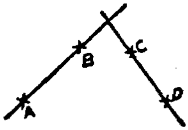
(1) 'ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருத்தல்.' என்னும் அடிப்படையில் 'சர்வசமம்', என்னும் கருத்தை விளக்குக.

(2) இரு செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகள் 24 (சதுர அலகுகள்). அவை சர்வசமமா? விளக்குக.

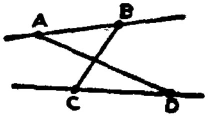
(3) அடியில் தரப்பட்டுள்ள படங்களில், சம அளவுள்ளவை போல் தோன்றும் பாகங்கள் உண்மையிலேயே சம அளவுள்ளவை என்று கொண்டு, முதல் மூன்று படங்களில் சர்வசமக் கோட்டுத் துண்டுகளை எடுத்தெழுதுக.



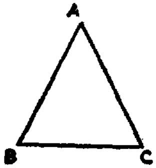
படம் 13-30.



படம் 13-31.

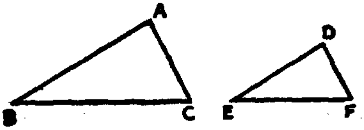


படம் 13-32.



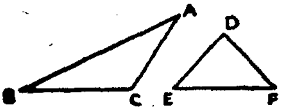
படம் 13-33.

படம் 13-33-ல் உள்ள முக்கோணத்தின் பக்கங்கள், கோணங்களில் சர்வ சமமானவை எவை?



படம் 13-34.

படம் 13-34-ல் இரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமா?



படம் 13-35.

படம் 13-35-ல் இரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமா?

III. முக்கோணங்கள்

§1. கீழ் வகுப்புகளில் முக்கோணங்கள் வரையக் கற்றுக் கொண்டீர்கள். 3 தனிப்பட்ட அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டால் முக்கோணம் வரைய முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு :

(a) $AB = 5$, $AC = 6$, $m\angle A = 60$

(b) $AB = 7$, $m\angle A = 50$, $m\angle B = 70$

(c) $AB = 4$, $BC = 7$, $AC = 8$

முதல் எடுத்துக்காட்டில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு வெவ்வேறு இடங்களில் காகிதத்தில் இரு முக்கோணங்கள் வரைவோம். ஒன்றைக் கத்தரித்து மற்றொன்றின் மீது பொருந்த வைத்துப் பார்ப்போம். அவை ஒன்றின் மீது ஒன்று முற்றிலும் பொருந்தும்.

இவ்வாறே மற்ற இரு எடுத்துக்காட்டுகளிலும் செய்முறையில் பொருந்த வைத்துச் சர்வசமம் என்பதை அறிந்து கொள்ளலாம்.

பொதுவாகக் குறிப்பிட்ட அளவுகள் மூன்று கொடுக்கப்பட்டால் நாம் ஒரே ஒரு முக்கோணம் அந்த நிபந்தனைக்குட்பட்டு வரைகிறோம். நாம் வரைவது ஒரே ஒரு முக்கோணமானாலும், அந்த அளவுகளைக் கொண்டு எண்ணற்ற முக்கோணங்கள் வரைய முடியும். அத்தகைய எல்லா முக்கோணங்களும் சர்வசமம். முடிவற்ற உறுப்புகளை உடைய முக்கோண இனத்தில் ஒன்று நாம் வரைந்ததாகும். முக்கோணங்களின் சர்வசமத்திற்கு இம் மூன்று செய்முறை எடுத்துக்காட்டுகளும், மூன்று அடிப்படை நிபந்தனைகளைக் கொடுக்கின்றன. இவற்றை **முக்கோண சர்வசம அடிகோள்களாக** (Postulates) எடுத்துக்கொள்வோம். முதல் எடுத்துக்காட்டிலிருந்து **ப-கோ-ப-அடிகோளையும்**, இரண்டாவதிலிருந்து **கோ-ப-கோ-அடிகோளையும்**, மூன்றாவதிலிருந்து **ப-ப-ப-அடிகோளையும்** பெறலாம்.

அடிகோள் 15 : *(பக்கம்-கோணம்-பக்கம் அடிகோள்)*

இரு முக்கோணங்களுள், ஒன்றின் இரு பக்கங்கள் மற்றொன்றின் அவற்றிற்கு ஒத்த பக்கங்களுக்குச் சர்வசமமாயும், அந்த ஒவ்வொரு சோடி பக்கங்களாலான உள் அமைக் கோணங்கள் சர்வசமமாயும் இருந்தால், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமம்'' (ப-கோ-ப-அடிகோள்).

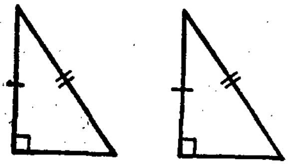
அடிகோள் 16: *(கோணம்-பக்கம்-கோணம் அடிகோள்)*

''இரு முக்கோணங்களுள், ஒன்றின் இரு கோணங்களும் அவற்றுலான உள் அமை பக்கமும் மற்றொன்றின் ஒத்த கோணங்கள், பக்கத்திற்குச் சர்வசமமானுல், அவ்விரு முக் கோணங்கள் சர்வ சமம்'' (கோ-ப-கோ-அடிகோள்)

அடிகோள் 17: *(பக்கம்-பக்கம்-பக்கம் அடிகோள்)*

''இரு முக்கோணங்களுள் ஒன்றின் மூன்று பக்கங்கள் மற்றொன்றின் அவற்றிற்கு ஒத்த பக்கங்களுக்குச் சர்வசமமானுல், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமம்''. (ப-ப-ப-அடிகோள்).

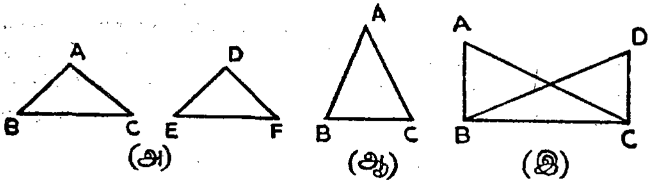
இம் மூன்று தவிர செங்கோண முக்கோணங்களின் சர்வசமம் ஒரு தனிப்பட்ட முறையில் கருதப் படவேண்டும்.



படம் 13-36.

[குறிப்பு: படத்தில் சம அளவுள்ள சோடி பக்கங்கள், கோணங்கள் ஒரேவித அடையாளமிட்டுக் காட்டப்பட்டிருப்பதைக் கவனிக்க.]

ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் இரு பக்கங்களும், ஒரு கோணமும் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன ஆனுல், கோணமானது. கொடுக்கப்பட்ட இரு பக்கங்களான உள் அமைகோணம் இல்லை ஆகவே, இது ப-கோ-ப-அடிகோள் விவரணத்திலிருந்து மாறுபடுகிறது. எனினும், முக்கோண உச்சிகளை ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தல் முறையில் சர்வசமத்திற்குச் சோதித்தால், அவை சர்வசமமாயிருப்பதைக் காணலாம். ஆகையால், இஃது ஒரு புது உண்மையைக் காட்டுகிறது. இது செங்கோண முக்கோணங்களைப் பற்றியது.



படம் 13-37.

அடிகோள் 18 : இரு செங்கோண முக்கோணங்களில் ஒன்றின் கர்ணம் மற்றொன்றின் கர்ணத்திற்கும், ஒன்றின் ஒரு பக்கம் மற்றொன்றின் அதற்கு ஒத்த பக்கத்திற்கும் சர்வசமமானுல் அவை சர்வசமம் (க-ப-செ. கோ-அடிகோள் : *H-L*-Postulate)

§ 2. 'சர்வசமம்' என்பதைச் சோதிக்கும்போது படம் 13-37-ல் காட்டியது போல் மூன்று விதத்தில் முக்கோணங்கள் அமையலாம்.

(a) $\triangle ABC$ ஐ $\triangle DEF$-உடன் ஒப்பிடுவது.

(b) $\triangle ABC$ ஐ $\triangle ACB$ (அதோடேயே) ஒப்பிடுவது.

(c) $\triangle ABC$ ஐ $\triangle DBC$-உடன் ஒப்பிடுவது (இரு முக்கோணங்களில் பொதுவான பாகம் காணப்படலாம்).

எவ்வாறுனுலும் சரி, ஒத்த சோடி உச்சிகள், பக்கங்கள், கோணங்களைக் கவனித்து நிரூபணம் கூறவேண்டும்.

§ 3. வடிவியலில், வடிவங்கள், அவற்றின் தன்மை—பற்றிய பல விவரங்களைச் செய்முறையில் கண்டு, அவற்றைப் பொதுப் படுத்தி, பொது விவரணம் கொடுத்தோம்.

ஆனுல், செய் முறையின் குறைபாடுகளை நீக்க அறிமுறை நிறுவல் அவசியம் எனக் குறிப்பிட்டோம்.

ஓர் எடுத்துக்காட்டை இங்கு எடுத்துக்கொள்வோம். "ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்கள் சர்வ சமமானுல், அப் பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சர்வசமமாகும்"

(செய்முறையில் பல வடிவங்களை வரைந்து, உண்மையைக் காண்க).

அறிமுறை நிறுவலின் சில முக்கிய அம்சங்களை இங்குக் கூறுவோம்.

மேற்கூறிய வடிவ கணித உண்மையைச் சாதாரண வாக்கியங்களைப் போல் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். ஒரு வாக்கியத்திற்கு எழுவாய், பயனிலை என்பது போல, இங்கும் (i) பேசப்படும் பொருள் : "ஒரு முக்கோணம்—அதில் இரு பக்கங்கள் சமம்" என்பது எடுகோள் (Hypothesis or Data) என்போம். (ii) மீதியுள்ள பாகம் (பயனிலை பாகத்தைப்போல்) நாம் நிரூபிக்க வேண்டியது (To Prove). (iii) இதற்குத் தகுந்த காரணங்களைக் கொண்டும், முன்பு தெரிந்த வடிவ கணித உண்மைகளைக் கொண்டும் ஒப்புக்கொள்ளப்பட்ட வரையறை, அடிகோள் முதலியவற்றைக் கொண்டும், படிப்படியாகத் தருக்க ரீதியில்—அதாவது காரணம்—விளைவு என்ற அடிப்படையில்—வழி எழுத வேண்டும். (iv) பொதுவாக, ஓர் உதவிப் படமும், (v) அவசியமானுல் புதிய அமைப்புக் கோடுகள் முதலியவை

செய்து கொள்ளலாம். இவையே அறிமுறை நிறுவலின் அம்சங்கள்.

§ 4. மறுதலை (Converse)த் தேற்றம்

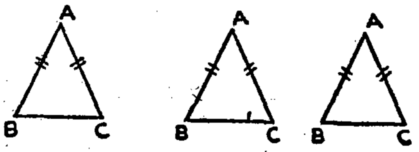
"ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்கள் சர்வசமமானால், அவற்றிற்கு எதிர் கோணங்கள் சர்வசமம்" என்னும் வாக்கியத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். இதில் "எடுகோள்", "நிரூபிக்க" என்னும் இரு பகுதிகளையும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றி, வாக்கியத்தைத் திருப்பி அமைப்போம். "ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்கள் சர்வசமமானால், அவற்றிற்கு எதிர்ப் பக்கங்கள் சர்வசமம்" என்னும் வாக்கியம் கிடைக்கும். இது, கொடுக்கப்பட்ட வாக்கியத்தின் மறுதலை (Converse) எனப்படும்.

குறிப்பு: மறுதலை வாக்கியம் மெய்யாக இருக்கலாம்; அல்லது மெய்யற்றதாகவும் இருக்கலாம். நாம் இதை ஆராய்ந்து அறியவேண்டும்.

§5. சர்வ சம கருத்தைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு நாம் இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் சில தன்மைகளை அறிமுறையில் நிரூபிக்கலாம் என்பதை இனி விளக்குவோம்.

தேற்றம் 2

ஒரு முக்கோணத்தின் இருபக்க அளவுகள் சமமானால் அவற்றிற்கு எதிரான கோண அளவுகள் சமம்.



படம் 13-38.

எடுகோள்: $\triangle ABC$-ல் $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

நிரூபிக்க: $\angle B \cong \angle C$

நிரூபணம்: $\triangle ABC$ ஐ $\triangle ACB$ யுடன் (அதாவது ஒரு முக்கோணத்தை அதே முக்கோணத்தோடு) $ABC \leftrightarrow ACB$ என்று ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தம் செய்க:

விவரணம்	காரணம்
$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$	எடுகோள்
$\overline{AC} \equiv \overline{AB}$	சமச்சீர் தொடர்பு
உள் அமை $\angle A \equiv$ உள் அமை $\angle A$	மீட்புத் தொடர்பு
$\triangle ABC \equiv \triangle ACB$	ப-கோ-ப-அடிகோள்
$\angle B \equiv \angle C$	சர்வசமப் பண்பு

தேற்றம் 3

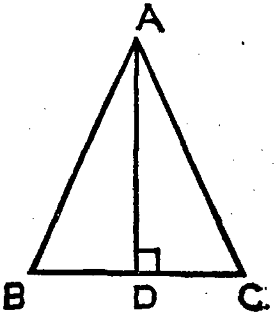
ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்கள் சர்வசமம் எனில், அவற்றிற்கு எதிர்ப்பக்கங்கள் சர்வ சமம்.

[இது 2ஆம் தேற்றத்தின் மறுதலையாகும்]

கோ-ப-கோ அடிகோளைக் கொண்டு $ABC \leftrightarrow ACB$ என்பது சர்வசமப் பொருத்தம் என்று காட்டுவதன்மூலம் இத் தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் 4

இரு சமபக்க முக்கோணமொன்றில் சர்வ சமபக்கங்கள் வெட்டும் உச்சியிலிருந்து அடிப்பக்கத்திற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைந்தால், அது அடிப்பக்கத்தை இரு சமக் கூறிடும்.



படம் 13-39.

எடுகோள் : $\triangle ABC$-ல் $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$. A-யிலிருந்து $\overline{BC}$-க்கு, $\overline{AD}$ செங்குத்து.

நிரூபிக்க : $\overline{BD} \equiv \overline{DC}$.

நிரூபணம் : $\triangle ABD$, $\triangle ACD$-ல்,

$ABD \leftrightarrow ACD$ என்ற ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தம் செய்க.

விவரணம்	காரணம்
கர்ணம் $\overline{AB} \equiv$ கர்ணம் $\overline{AC}$	எடுகோள்
$\overline{AD} \equiv \overline{AD}$	மீட்புறவு
$\angle ADB \equiv \angle ADC$	$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது
$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$	கர்ணம் - பக்கம் - செங்கோண முக்கோண அடிகோள்
$\overline{BD} \equiv \overline{CD}$	முக்கோணங்களின் சர்வசமப் பண்பு

தேற்றம் 5

ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிப் புள்ளி, அதன் அடிப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளி — வழியே செல்லும் கோடு, அடிப் பக்கத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்.

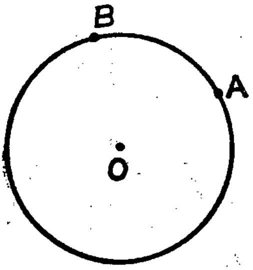
இது, தேற்றம் 4-ன் ஒரு மறுதலையாகும்.

ப-ப-ப-அடிகோளைப் பயன்படுத்தி, $ABD \leftrightarrow ACD$ என்பது சர்வசமப் பொருத்தம் என்று காட்டி இத் தேற்றத்தை நிறுவுக.

பயிற்சி 13·5

ABC ஒரு முக்கோணம். D என்பது $\overline{BC}$-ன் மையப் புள்ளி. $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ எனில் $AB = AC$ என்று காட்டுக.

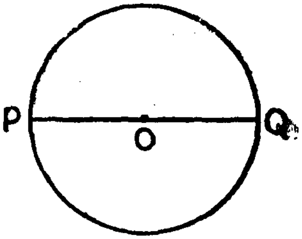
§6. **வரையறை :** O என்பது தளத்தின் ஒரு புள்ளி, r என்பது ஒரு மிகை எண் எனில், அத்தளத்தில் O-லிருந்து r அளவு தூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் கணம் வட்டம் எனப் படும். O ஆனது இதன் மையம், r என்பது இதன் ஆரம்.



படம் 13-40.

A, B என்பன வட்டத்தின் புள்ளிகள் எனில், $\overline{BA}$ ஒரு நாண் எனப்படும். $O \in \overline{AB}$ எனில், $\overline{AB}$ ஒரு விட்டம் எனப்படும்.

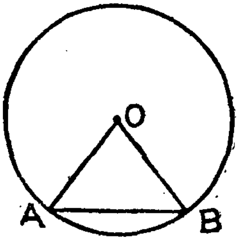
$\overline{OA}$, $\overline{OB}$ போன்ற கோட்டுத் துண்டுகள் ஆரங்கள் எனப்படும். ஆரம் எனும் சொல் $\overline{OA}$, $m(\overline{OA})$ என்ற இரு பொருள்களிலும் பயன் படுத்தப்படும். இவ்வாறே விட்டம் என்னும் சொல் $\overline{PQ}$, $2r$ என்ற இரு பொருள்களில் பயன்படுத்தப்படும். சந்தர்ப்பத்தைப் பொறுத்து இச் சொற்களின் பொருள்களை அறிய வேண்டும்.



படம் 13-41.

பயிற்சி 13·6

AB என்பது ஒரு வட்டத்தின் நாண். O அதன் மையம். (படத்தைப் பார்க்க).



படம் 13-42.

(i) $\triangle OAB$ இரு சமபக்க முக் கோணம் என்று காட்டு.

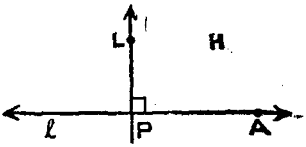
(ii) $\angle OBA \equiv \angle OAB$ என்று காட்டு.

(iii) D என்பது $\overline{AB}$-ன் மையப் புள்ளி எனில் $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ என்று காட்டு.

(iv) $\overline{OD} \perp \overline{AB}$, $D \in \overline{AB}$ எனில் $\overline{AD} \equiv \overline{DB}$ என்று காட்டு.

§7. செங்குத்துக்கோடுகள்

H என்ற அரை தளத்தின் ஓரம் l என்க. P என்பது l-ன் ஒரு புள்ளி எனில், P ஐ உச்சிப் புள்ளியாகவும் l-ன் மேல் இருக்கு மாறு ஒரு புயமாகவும் மற்றொரு புயம் PL ஆனது H-ல் இருக்கு மாறும் ஒரு செங்கோணம் வரைய முடியும் அல்லவா ?



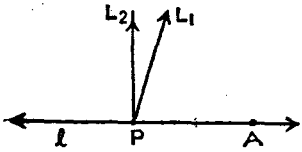
படம் 13-43.

$\overleftrightarrow{PL}$ ஐ l-ன் செங்குத்து என்போம்.

தேற்றம் 6

ஒரு கோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி வழியே அதற்கு ஒரேயொரு செங்குத்துதான் வரைய முடியும்.

ஏனெனில் $\overleftrightarrow{PL_1}$, $\overleftrightarrow{PL_2}$ *என்ற இரு கோடுகள் l-க்குச் செங்குத்து எனில்,*



படம் 13-44.

$$m\angle APL_1 = 90$$

$$m\angle APL_2 = 90$$

எனவே,

$$\angle APL_1 \cong \angle APL_2$$

எடுகோள் 12-ன் படி $\overrightarrow{PL_1} = \overrightarrow{PL_2}$

ஆகவே $\overleftrightarrow{PL_1} = \overleftrightarrow{PL_2}$

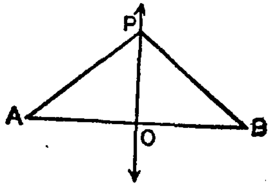
பயிற்சி : *P* என்பது *l* எனும் கோட்டிலமையாத புள்ளி. *P*-யிலிருந்து *l*-க்கு ஒரேயொரு செங்குத்துக் கோடுதான் உள்ளது என்று காட்டுக.

வரையறை 1 : ஒரு கோட்டுத் துண்டின் மையப் புள்ளி வழியே அதற்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு மையக் குத்துக்கோடு எனப்படும்.

தேற்றம் 7

ஒரு கோட்டின் முனைப் புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் கணம் அதன் மையக் குத்துக் கோடாகும்.

(i) $\overline{AB}$-ன் மையப் புள்ளி *O* ; $\overleftrightarrow{OP}$ ஆனது $\overline{AB}$-ன மையக் குத்துக் கோடு என்க.



படம் 13-45.

$\overline{AO} \cong \overline{OB}$ ($\overline{AB}$-க்கு *O* மையப் புள்ளி)

$\angle AOP \cong \angle BOP$ (செங்கோணங்கள்)

$\overline{OP} \cong \overline{OP}$ (மீட்பு உறவு)

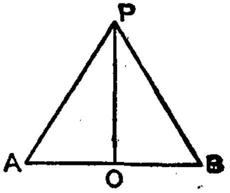
ஆகவே ப-கோ-ப எடுகோளின்படி

$$\triangle AOP \equiv \triangle BOP$$

$$PA = PB.$$

அதாவது *AB*-ன் மையக் குத்துக் கோட்டின் எப் புள்ளியும் *A*, *B* இவற்றிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ளது.

(ii) *P* என்பது *A*, *B* என்பவற்றிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி என்க.

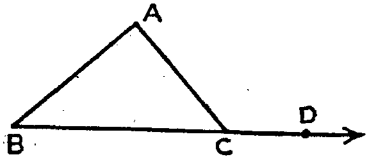


படம் 13-46.

O என்பது $\overline{AB}$-ன் மையப் புள்ளி என்க. இப்போது $\triangle PAB$ இரு சமபக்க முக்கோணம் ஆதலால் தேற்றம் 5-ன் படி $\overleftrightarrow{OP} \perp \overline{AB}$. எனவே $\overleftrightarrow{OP}$யே $\overline{AB}$-ன் மையக் குத்துக் கோடு. அதாவது *P* ஆனது $\overline{AB}$-ன் மையக் குத்துக் கோட்டில் அமைகிறது. (i), (ii)-லிருந்து நாம் 7 ஆம் தேற்றத்தின் உண்மையை அறிகிறோம்.

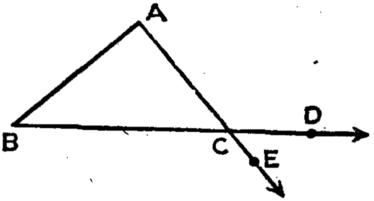
IV. சமனிலிகள்

§1. *ABC* என்ற ஒரு முக்கோணம் வரை. *D* என்ற புள்ளியை *B-C-D* என்றவாறு எடுத்துக் கொள். $\angle ACD$ என்பது $\triangle ABC$-க்கு *C*-ல் ஏற்படும் புறக் கோணம் எனப்படும்.



படம் 13-47

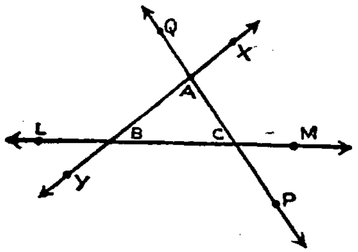
ABC என்ற முக்கோணத்தில் $\angle CAB$, $\angle ABC$, $\angle BCA$ என்று மூன்று கோணங்கள் உள்ளன. இவற்றைச் சுருக்கமாக முறையே $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.



படம் 13-48.

படத்தில் $\angle BCE$ என்பதும் $\triangle ABC$-க்கு *C*-ல் ஏற்படும் ஒரு புறக் கோணம் ஆகும். *B* ஆனது $\angle ACD$-க்கு வெளிப் புறத்திலும் *A* ஆனது $\angle BCE$-க்கு வெளிப் புறத்திலும் அமைந்து இருப்பதைக் கவனிக்க.

ஒரு முக்கோணத்திற்குப் புறக் கோணங்கள் ஆறு உள்ளன.

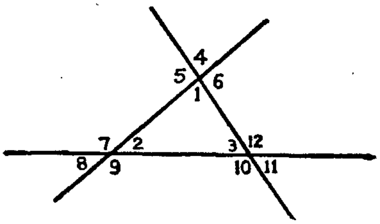


படம் 13-49.

படத்தில் உள்ள முக்கோணம் *ABC*-ன் ஆறு புறக்கோணங்களையும் எழுதுக.

புறக்கோணம் $\angle ACD$-ம், $\angle ACB$-ம் (படம் 13-47) கோட்டுக் கோண சோடிகளல்லவா? $\angle ACB$ ஐத் தவிர்த்து $\triangle ABC$-ல் மற்ற இரு கோணங்கள் $\angle BAC$, $\angle ABC$ என்பனவாம். இவை ஒவ்வொன்றும் $\angle ACD$-ன் உள் எதிர்க்கோணங்கள் எனப்படும்.

§2. முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு மூலையிலும் ஏற்பட்டுள்ள கோணங்கள் 1 முதல் 12 முடிய எண்களிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளன (படம் 13-50). பின்வரும் கோடிட்ட இடங்களை நிரப்பு.



படம் 13-50.

(i) ...... இவை ஒரு சோடி குத்தெதிர்க் கோணங்கள்.

(ii) ——— இவை கோட்டுக் கோண சோடி.

(iii) கோணம் 7-க்கு உள் எதிர்க் கோணம் ——— அல்லது ———.

(iv) கோணம் 1 அல்லது 2 ஐ உள் எதிர்க் கோணமாகக் கொண்ட புறக் கோணம் ———.

(v) 12 என்று எண்ணிட்ட கோணத்தின் அளவு ———, ——— என்ற எண்ணிட்ட கோணங்களின் அளவுகளைவிட அதிகமாகக் காணப்படும்.

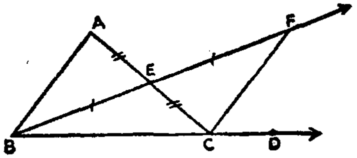
§ 3. *ABC* என்ற முக்கோணம் வரைக. அதன் ஒரு வெளிக் கோணத்தையும், அதற்கிசைந்த உள் எதிர்க்கோணம் ஒன்றையும் அளந்து பார்க்க. எது பெரியதாக இருக்கிறது? இம் மாதிரி பல முக்கோணங்களில் அளந்து பார்த்தால் பின்வரும் தேற்றத்தின் உண்மை புலனாகும்.

*தேற்றம் 8

ஒரு முக்கோணத்தின் புறக் கோணம் ஒவ்வொரு உள் எதிர் கோணத்தையும் விடப் பெரியதாகும்.

எடுகோள் : $\triangle ABC$-ல் $\angle ACD$ ஒரு புறக் கோணம்.

நிரூபிக்க: $\angle ACD > \angle A$ (அல்லது $\angle B$).



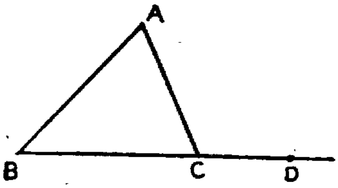
படம் 13-51.

நிரூபணம் :

	விவரணம்	காரணம்
1.	$\overline{AC}$-ன் நடுப்புள்ளி E எனக் கொள்க.	அமைப்பு
2.	$\overrightarrow{EB}$-க்கு நேர் எதிர்க்கதிரில் F என்ற ஒரு புள்ளி $\overline{EF} \cong \overline{EB}$ என இருக்குமாறு எடுத்துக் கொள்க.	அமைப்பு
3.	F ஆனது $\angle ACD$-ன் உட்புறமுள்ள புள்ளி.	B ஆனது $\angle ACD$-க்கு வெளிப்புறமுள்ள புள்ளி.
4	$\overline{BE} \cong \overline{FE}$	அமைப்பு 2
5.	$\overline{AE} \cong \overline{CE}$	அமைப்பு 1
6.	$\angle AEB \cong \angle CEF$	குத்தெதிர்க் கோண சோடிகள்
7.	$\triangle AEB \cong \triangle CEF$	ப-கோ-ப அடிகோள்
8.	$m\angle A = m\angle ECF$	சர்வசமத்தின் பண்பு
9.	$m\angle ACD = m\angle ECF + m\angle FCD$	படி-3, அடிகோள்-13
10.	$m\angle ACD = m\angle A + m\angle FCD$	படி 8
11.	$m\angle ACD > m\angle A$	எண்களின் வரிசைப்பண்பு
12.	$\angle ACD > \angle A$	கோணங்களில் வரிசை வரையறை
13.	$\angle ACD > \angle B$	இவ்வாறே

***தேற்றம் 9**

ஒரு முக்கோணத்தில் எந்த இரு கோணங்களின் அளவுகளின் கூட்டுத் தொகையும் 180 ஐ விடக் குறைந்திருக்கும்.



படம் 13-52.

எடுகோள் :

ABC ஒரு முக்கோணம்

நிரூபிக்க :

(i) $m\angle A + m\angle B < 180$

(ii) $m\angle B + m\angle C < 180$

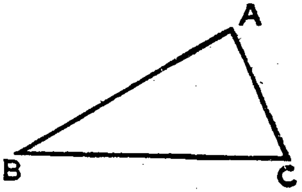
(iii) $m\angle C + m\angle A < 180$

வரைதல் : ACD என்ற வெளிக் கோணம் வரைக.

நிரூபணம் :

விவரணம்	காரணம்
1. $m\angle ACD > m\angle B$	தேற்றம் 8
2. $m\angle C + m\angle ACD > m\angle C + m\angle B$	படி 1-ம், எண்களின் வரிசைப் பண்பும்
3. $m\angle C + m\angle ACD = 180$	$\angle C$, $\angle ACD$ என்பன கோட்டுக் கோண சோடிகள், அடிகோள் 14
4. $180 > m\angle B + m\angle C$	படி 2, படி 3
5. $180 > m\angle A + m\angle B$	படி 1 முதல்படி 4 வரை தகுந்தபடி மாற்றி நிரூபிக்கக் கூடியவை.
6. $180 > m\angle C + m\angle A$	

§4. $AB > AC$ இருக்கும்படி $\triangle ABC$ வரை. $\angle B$, $\angle C$ஐ அள. பெரிய அளவுள்ள பக்கத்திற்கு எதிரான கோணத்தை, சிறிய அளவுள்ள பக்கத்திற்கு எதிரான கோணத்துடன் ஒப்பிடு.



படம் 13-53.

இவ்விதம் பல முக்கோணங்களை வரைந்து ஒப்பிட்டுப் பார். பெரிய பக்கத்தின் எதிரான கோணமானது சிறிய பக்கத்தின் எதிரிலுள்ள கோணத்தை விட எப்போதும் பெரியதாக இருக்கிறதல்லவா ? இதனை ஒரு தேற்றமாகக் காண்க.

தேற்றம் 10

ஒரு முக்கோணத்தில் இரு பக்கங்கள் சர்வ சமமில்லை எனில், பெரிய பக்கத்தின் எதிரிலுள்ள கோணம் சிறிய பக்கத்தின் எதிரிலுள்ள கோணத்தைவிடப் பெரியதாகும்.

பயிற்சி : $\triangle PQR$-ல் $m\angle Q > m\angle R$. $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$ ஐ அளக்க. நீ காண்பதென்ன ? இந்த உண்மையை எவ்வாறு விவரிக்கலாம்?

§5. ஒரே கோட்டில் அமையாத X, Y, Z, என்ற மூன்று புள்ளிகளைக் குறி. X-லிருந்து Z-க்கு நேராகச் செல்வது சுருக்கு வழியா? X-லிருந்து Y-க்குச் சென்று அங்கிருந்து Z-க்கு வருவது சுருக்கு வழியா ? இதிலிருந்து $\overline{XZ}$ ஐயும் $\overline{XY} + \overline{YZ}$ ஐயும் ஒப்பிட்டு விடை கூறுக.

பொதுவில் நாம் அடியிற்கண்ட தேற்றத்தைப் பெறுகிறோம்.

தேற்றம் 11

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் அளவுகளின் கூட்டுத் தொகை மூன்றாவது பக்க அளவைவிடப் பெரியதாகும்.

§6. $AB = 10$ (சென்டி மீட்டரில்) என்க.

(i) A ஐ மையமாகக் கொண்டு 6 செமீ கோட்டுத் துண்டின் அளவை ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரை. B ஐ மையமாகக் கொண்டு 3 செமீ கோட்டுத் துண்டின் அளவை ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரை.

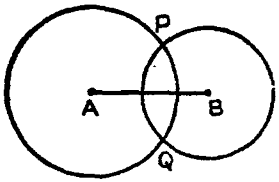
(ii) முன் பகுதியில் இரண்டாவது வட்டம் 4 செமீ அளவுள்ள கோட்டுத் துண்டை ஆரமாகக் கொண்டது என்க.

(iii) முதல் பகுதியில் கூறிய இரண்டாவது வட்டம் 4 செமீ-க்கு அதிகமான அளவுள்ள கோட்டுத் துண்டின் அளவை ஆரமாகக் கொண்டது எனக் கொள்க.

இம் மூன்றிலிருந்தும் வட்ட சோடிகள் வெட்டுதல் அல்லது வெட்டாதிருத்தல் என்பதைப் பற்றி நீங்கள் காண்பதென்ன ? இதன் மூலம் நாம் சரிபார்த்தது யாது?

தேற்றம் 12

இரு வட்டங்களின் ஆர அளவுகள் a, b; மையங்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரம் c என்க. $c < a + b$ எனில் இவ்விரு வட்டங்களும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளும். மேலும், இவ்விரு புள்ளிகளும் வட்ட மையங்களின் வழியே செல்லும் கோட்டிற்கு எதிர்ப் புறங்களில் அமையும்.



படம் 13-54.

§7. ABC என்ற ஒரு முக்கோணத்தில் $AB + BC > AC$ என்று தேற்றம் 11-ல் கண்டோம். $AB - BC$ ஐப் பற்றி என்ன கூற முடியும்?

தேற்றம் 10-ன் படி $BC + CA > AB$ அல்லவா?

ஆகவே $CA > AB - BC$.

இதிலிருந்து பின்வரும் தேற்றத்தின் உண்மையை நாம் அறியலாம்.

தேற்றம் 13

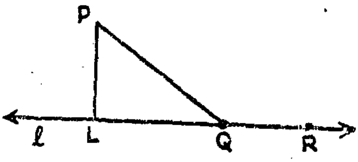
ஒரு முக்கோணத்தில் இரு பக்க அளவுகளின் வித்தியாசம், அதன் மூன்றாவது பக்க அளவைவிடச் சிறியதாகும்.

§8.

தேற்றம் 14

கொடுத்த ஒரு புள்ளிக்கும், அதன் வழியே செல்லாத, கொடுத்துள்ள ஒரு கோட்டின் மேலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தூரமானது—இப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டு கொடுத்துள்ள கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயிருக்கும் போது மிகச் சிறியதாயிருக்கும்.

l என்பது P வழியே செல்லாத ஒரு கோடு. $\overline{PL} \perp l$. Q என்பது l-ன் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. R என்பது L-Q-R என்று அமைந்து இருக்கிறது என்க. தேற்றம் 8-ன் படி,



படம் 13-55.

$m\angle PQR < m\angle PLQ$ அல்லவா? ஆனால், $m\angle PLQ = 90$.
ஆகவே, $m\angle PQR > 90$.

அத்துடன் $m\angle PQL + m\angle PQR = 180$ என்பதும் தெரியு மல்லவா ?

ஆகவே, $m\angle PQL < 90$.

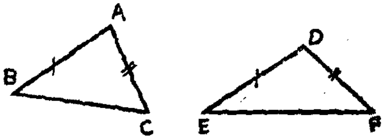
அதாவது $m\angle PQL < m\angle PLQ$.

அதாவது $\angle PQL < \angle PLQ$.

எனவே $\overline{PL} < \overline{PQ}$ (தேற்றம் 10).

இதனுல் தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

§ 9. $\triangle ABC$, $\triangle DEF$-ல் $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ஆனுல் உள் அமைந்த கோணம் A உள் அமைந்த கோணம் D ஐ விடச் சிறியது என்ருல், $\overline{BC}$, $\overline{EF}$ அளவுகளைப் பற்றி நீங்கள் காண்பதென்ன ? இம் மாதிரி பல சோடி முக்கோணங்கள் வரைந்து அடியிற்கண்ட தேற்றத் தைச் சரிபார்க்கலாம்.



படம் 13-56.

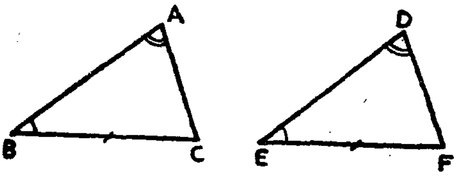
தேற்றம் 15

இரு முக்கோணங்களில் ஒன்றன் இரு பக்கங்கள் மற்றதன் இரு பக்கங்களுக்குச் சர்வசமமாயும் முதல் முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் உள் அமைந்த கோணம், இரண்டாம் முக்கோணத்தின் ஒத்த பக்கங் களின் உள் அமைந்த கோணத்தைவிடப் பெரியதாயும் இருந்தால், முதல் முக்கோணத்தின் மூன்ரும் பக்கம் இரண்டாம் முக்கோணத்தின் மூன்ரும் பக்கத்தைவிடப் பெரியதாகும்.

தேற்றம் 16

இரு முக்கோணங்களின் உச்சிப் புள்ளிகளிடையே ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தம் செய்க. ஒன்றின் ஒரு பக்கமும் இரு கோணங்களும், மற்றதில் அவற்றிற் கொத்த பாகங்களுடன் சர்வ சமமாயின் இரு முக் கோணங்களும் சர்வசமம்.

படத்தில் ABC, DEF என்ற முக்கோணங்களிடையே $ABC \leftrightarrow DEF$ என்ற பொருத்தத்தில் $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ எனில், $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



படம் 13-57.

தேற்றம் 8 ஐக் கொண்டு இதனை நிரூபிக்க முடியும். முயன்று பார்க்க.

தேற்றம் 17

இரு செங்கோண முக்கோணங்களில் ஒன்றின் கர்ணமும், ஒரு பக்கமும், முறையே மற்றதன் கர்ணம், ஒரு பக்கம் ஆகியவற்றுக்குச் சர்வசமம் எனில் அம் முக்கோணங்கள் சர்வசமம்.

இது முன்பு (18 ஆம்) அடிகோளாகக் கருதப்பட்டது. ஆயினும், இதனைத் தேற்றம் 16 ஐப் பயன்படுத்தி நிரூபிக்க முடியும். முயன்று பார்க்கவும்.

பயிற்சி 13·7

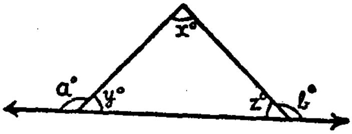
விடுபட்ட இடங்களைச் சரியாக நிரப்புக :

(1) (a) $a >$ —— அல்லது ——.

(b) $b >$ —— அல்லது ——.

(c) $a + y =$ ——, $b + z =$ ——

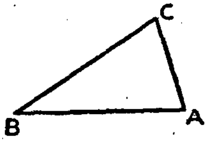
விடைகளுக்கு காரணம் கூறுக.



படம் 13-58.

(2) $BC > AC$ என்றால்,

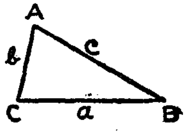
$m\angle$ — $>$ $m\angle$ —



படம் 13-59 (a).

(3) $c > a > b$ என்றால்,

$m\angle$ — $<$ $m\angle$ — $<$ $m\angle$ —



படம் 13-59 (b).

(4) a, b, c ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் என்றால்

$a + b > \dots \qquad a - b < \dots$

$b + c > \dots \qquad \dots - \dots < b$

$\dots + \dots > b \qquad \dots - \dots < c$

(5) பக்க அளவுகள் 3, 5, 12 கொண்டு ஒரு முக்கோணம் வரைய முடியாது என்பதற்குக் காரணமான தேற்றத்தின் பொது விவரணம் ________

(6) ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்க அளவுகள் 7, 10 எனில், மூன்றாவது பக்க அளவு ——— -க்கும் ——— -க்கும் இடையே இருக்க வேண்டும்.

(7) ΔPQR-ல் $\angle Q < \angle P < \angle R$ என்றால் அந்த முக்கோணத்தின் மிகச் சிறிய பக்கம் ———, மிகப் பெரிய பக்கம் ———.

(8) ஒரு முக்கோணத்தில் இரு கோணங்கள் விரிகோணங்களாக இருக்க முடியாது. ஏனென்றால் ________

(9) இரு சமபக்க முக்கோணம் ஒன்றன் சமகோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் குறுங்கோணமாக இருக்க வேண்டும். ஏனென்றால் ________.

(10) படத்தில் $a >$ ———

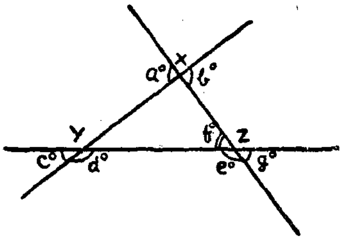
$c + d =$ ———

$g =$ ———

$e + g =$ ———

உட்கோணம் $f <$ ———

விடைகளுக்குக் காரணம் கூறுக.



படம் 13-60.

(11) (a) ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதற்கு வெளியே உள்ள ஒரு கோட்டிற்கு வரையப்படும் பல கோட்டுத் துண்டுகளுள் மிகச் சிறியது ———.

(b) இதை அப்புள்ளிக்கும், கோட்டுக்கும் இடையி லுள்ள ——— எனக் கூறுவோம்.

V. இணைகோடுகள்

§1. ஒரே தளத்திலுள்ள இரு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளலாம், அல்லது வெட்டிக்கொள்ளாமலிருக்கலாம். வெட்டிக்கொண்டால், அவை ஒரே புள்ளியில்தான் வெட்டிக்கொள்ளும். இந்த உண்மைகள் நீங்கள் முன்பே அறிந்தவை. தளம், கோடு ஆகியவை "முடிவில்லாதவை." ஆதலால், கோடுகள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக்கொள்ளுமா, கொள்ளாதா என்று எவ்வாறு சோதிப்பது? மேலும், தளம் என்பது சமதளமாக இருத்தல் வேண்டும். ஆனால், உலக அனுபவத்தில் இவ்வாறான தளம் காண்பதரிது.

கரும்பலகை, காகிதம், இவற்றின் தளங்களில் கோடுகளை அமைத்து, அவற்றின் பகுதிகளான கோட்டுத் துண்டுகள் வெட்டிக் கொள்கின்றனவா என்று சோதிப்பது சாத்தியம். ஆகவே, மேற்கூறிய சோதனையைத் தவிர, வேறு விதமான சோதனைகளும் இரு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளுமா என்று பார்ப்பதற்கு அவசியமாகிறது. அவை பற்றி இங்குக் காண்போம்.

கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைய வேண்டும் என்பது அவசியமான நிபந்தனை. ஏனெனில், தரையில் ஒரு கோடும், சுவரில் ஒரு கோடும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளாமலிருக்கும்படி வரையலாம். இத்தகைய கோடுகள் 'வெவ்வேறு தளங்களிலுள்ள ஒன்றையொன்று வெட்டாக் கோடுகள் (Skew lines)' எனப்படும்.

இணைகோடுகள்

வரையறை : ஒரே தளத்திலுள்ள இரு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டாவிட்டால், அவை ஒரு **சோடி இணை கோடுகள்** எனப்படும்.

'இணை' என்பதற்கு $\parallel$ என்ற அடையாளம் பயன்படுத்தப்படும்.

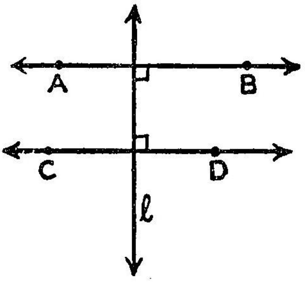
l_1, l_2 இணை என்றால், l_1-ன் பகுதி $\overline{AB}$, l_2-ன் பகுதி $\overline{CD}$, இவையும் இணை.

§2. இணை கோடுகளுக்கு ஒரு சோதனையை அடியில் ஒரு தேற்றமாகத் தந்துள்ளோம்.

SPECIMEN COPY
T.N.T.B.S - MADRAS.

ஒரே கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக உள்ள எவ்விரு கோடுகளும் இணை கோடுகளாகும்.

படத்தில் l-க்குச் செங்குத்தாயுள்ள இரு கோடுகள் AB, CD. $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ *இணை கோடுகளாக இருக்க வேண்டும்.* $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ *இணை இல்லாவிட்டால், அவை வெட்டிக் கொள்ள வேண்டுமல்லவா ? அவை P-ல் வெட்டிக் கொள்வதாக வைத்துக் கொள்வோம். அப்படியானல்,* $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$ *இரண்டும் l-க்குச் செங்குத்தாகும்.*



படம் 13-61.

ஆனல், ஒரு கோட்டிற்கு, அதற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து ஒரே ஒரு செங்குத்துக் கோடுதான் வரைய முடியும். (தேற்றம் 6 பயிற்சி). ஆகவே, இரு கோடுகளும் வெட்டிக் கொள்ளும் என்று வைத்துக் கொண்டது தவறு.

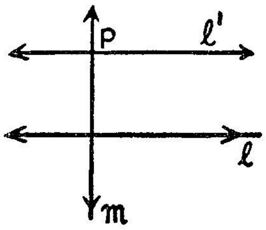
ஆகையால், $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

***தேற்றம் 19**

கொடுத்துள்ள கோட்டிற்கு இணையாக, அதன் மேலமையாத ஒரு புள்ளி வழியாக, ஒரு கோடேனும் உள்ளது.

எடுகோள் :

l என்பது கொடுத்துள்ள கோடு. P என்பது கொடுத்துள்ள புள்ளி. $P \notin l$.



படம் 13-62.

நிரூபிக்க : *l-க்கு இணையாக, P வழியே செல்லும் ஒரு கோடு உள்ளது.*

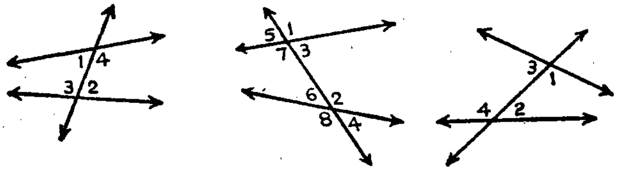
வரைதல் : *m என்பது P வழியே செல்லுமாறும், l-க்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள கோடு. l' என்பது P வழியாக, m-க்குச் செங்குத்தாக உள்ள கோடு.*

நிரூபணம் :

விவரணம்	காரணம்
(1) $l \perp m$	வரைதல்
(2) $l' \perp m$	வரைதல்
(3) $l \parallel l'$	தேற்றம் 18.

§3. இணை கோடுகளுக்கு மற்றொரு சோதனையை நாம் இனி கண்டறிவோம். அதற்கு முன் சில புதிய கலைச் சொற்களின் பொருளைப் பின் வரும் படங்கள் மூலமாக நாம் தெரிந்து கொள்வோம்.

வரையறை : இரு கோடுகளை மற்றொரு கோடு வெட்டுமானால், அது குறுக்கு வெட்டு அல்லது வெட்டுக் கோடு (Transversal) எனப்படும்.



படம் 13-63.

1, 2 ; 3, 4

சோடி கோணங்கள் உள் அமைந்த ஒன்று விட்ட கோணங்கள் (Alternate angles) எனப்படும்.

1, 2 ; 3, 4 ;
5, 6 ; 7, 8

இவை ஒவ்வொன்றும், சோடி ஒத்த கோணங்கள் எனப்படும். (Pairs of corresponding angles)

1, 2 ; 3, 4

இவை வெட்டுக் கோட்டின் ஒரே பக்கத்திலுள்ள சோடி உள் அமைந்த கோணங்கள் **(A pair of interior angles on the same side of the transversal).**

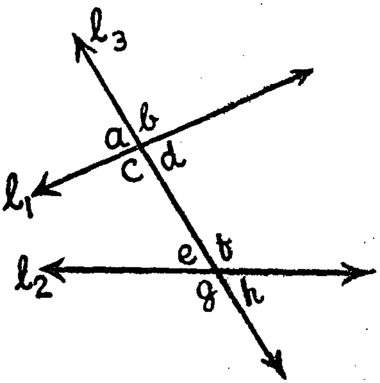
பயிற்சி 13·8

படத்தில் டிகிரியில் கோண அளவுகள் *a, b, ... h* எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

(1) உள் அமைந்த ஒன்று விட்ட கோணச் சோடிகளைக் கூறுக.

(2) ஒத்த சோடிக் கோணங்கள் நான்கையும் கூறுக.

(3) குறுக்கு வெட்டின் வலப்பக்கம், இடப்பக்கமுள்ள உள் அமை சோடி கோணங்கள் எவை ?

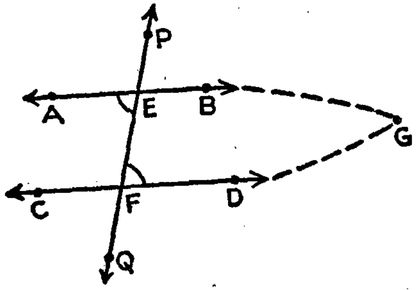


படம் 13-64.

அடுத்த மூன்று தேற்றங்கள் ஒவ்வொன்றும் இரு கோடுகள் இணையாக இருப்பதற்குப் போதிய நிபந்தனையைத் தருகின்றன.

*தேற்றம் 20

இரு கோடுகளை ஒரு குறுக்குக் கோடு வெட்டும் போது, ஏற்படும் ஒரு சோடி உள் அமைந்த ஒன்று விட்ட கோணங்கள் சர்வ சமமானல், அவ்விரு கோடுகளும் இணையாகும்.



படம் 13-65.

எடுகோள் : $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ என்னும் கோடுகளை $\overleftrightarrow{PQ}$ என்ற குறுக்குக் கோடு *E, F*-ல் வெட்டுகிறது.

$\angle AEF \cong \angle DFE$

நிரூபிக்க : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

நிரூபணம் : $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ இணையாயில்லை என வைத்துக்கொள்வோம். அப்படியானல் அவை ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளவேண்டும். அந்த வெட்டுப் புள்ளி G என வைத்துக் கொள்.

அப்பொழுது EFG ஒரு முக்கோண வடிவமாகும்.

$\angle AEF$, அதன் ஒரு புறக் கோணமும், $\angle GFE$ அதற்கிசைந்த உள் எதிர் கோணமும் ஆகும்.

ஆகவே, $\angle AEF > \angle GFE$ (தேற்றம்)

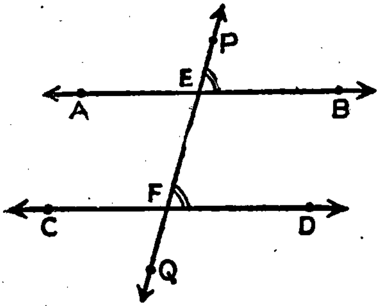
ஆனல், $\angle AEF \equiv \angle EFD$ (எடுகோள்)

$\equiv \angle GFE$

இது எடுகோளுக்குப் பொருந்தா முடிவு. ஆகையால், $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

*தேற்றம் 21

இரு கோடுகளை ஒரு குறுக்குக் கோடு வெட்டும்போது ஏற்படும் ஒருசோடி ஒத்த கோணங்கள் சர்வ சமமானல், அவ்விரு கோடுகளும் இணையாகும்.



படம் 13-66.

எடுகோள் : $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ என்ற கோடுகளை E, F-ல் $\overleftrightarrow{PQ}$ வெட்டுகிறது. $\angle PEB = \angle EFD$

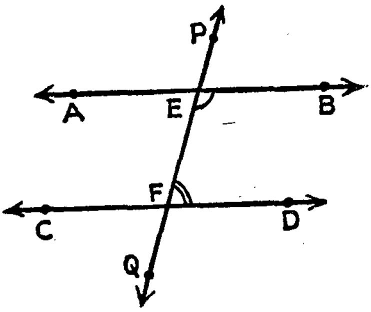
நிரூபிக்க : $AB \parallel CD$

நிரூபணம் :

விவரணம்	காரணம்
1. $\angle AEF \equiv \angle PEB$	குத்தெதிர்க் கோணங்கள்
2. $\angle PEB \equiv \angle EFD$	எடுகோள்
3. $\angle AEF \equiv \angle EFD$	கடத்தித் தொடர்பு
4. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	தேற்றம் 20

*தேற்றம் 22

இரு கோடுகளை மற்றொரு குறுக்குக் கோடு வெட்டும் போது, அதன் ஒரே பக்கத்திலுள்ள ஒரு சோடி உள் அமைக் கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகளானால், அவ்விரு கோடுகளும் இணையாகும்.



படம் 13-67.

எடுகோள: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ ஐ $\overleftrightarrow{PQ}$ என்னும் கோடு E, F-ல் வெட்டுகிறது. $\angle BEF$, $\angle EFD$ மிகை நிரப்பிகள்.

நிரூபிக்க: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

நிருபணம்:

விவரணம	காரணம
1. $\angle EFD$, $\angle BEF$ மிகை நிரப்பிகள்	எடுகோள்
2. $\angle BEF$, $\angle PEB$ மிகை நிரப்பிகள்	கோட்டுக் கோண சோடி
3. $\angle EFD \cong \angle PEB$	இவை $\angle BEF$ என்ற கோணத்தின் மிகை நிரப்பிகள்
4. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	தேற்றம் 21

20, 21, 22 ஆம் தேற்றங்களின் மறுதலைகள் மெய்யான தேற்றங்களா என்று இனி ஆராய்வோம். இங்கு வரைமுறையில் சோதித்துப் பார்த்தோமாயின், மறுதலைகள் மெய்யென்றே கூறத் தோன்றும். எடுத்துக்காட்டாக, இரு இணை கோடுகளுக்கு ஒரு குறுக்கு வெட்டியை வரைந்து, அதனால் ஏற்படும் உள்ளமைந்த ஒன்று விட்ட கோணங்களை அளந்து பார்த்தால், அளவுகள் சமமாக இருக்கும். அளந்தறியும் அளவுகளைத் துமே தோராயமானவை என்பதால், இக கோணங்களின்

அளவுகள் மெய்யாகவே சமமானவையா, அன்றி சமமானவை போலத் தோன்றுகின்றனவா என்ற ஐயம் ஏற்படுகிறது. இதற்காக, அறிமுறையில் மறுதலேகளை நிரூபிக்க முயன்றோமானால், நாம் ஏற்கெனவே எடுத்துக்கொண்ட எடுகோள்களைக் கொண்டு இவற்றை நிரூபிக்க முடியாது. கி.மு. 300 ஆம் ஆண்டில் வடிவ கணிதப் புத்தகம் எழுத முற்பட்ட யூக்ளிட் இதற்காக மற்றோர் அடிகோளை மேற்கொண்டார். பிற்கால கணித மேதைகள் பலர், இந்த அடிகோள் தேவையில்லை, அதனைத் தேற்றமாகவே நிரூபிக்க முடியுமென்று (தவறாக) எண்ணினர். சுமார் 150 ஆண்டுகளுக்கு முன்னர்தான் யூக்ளிட்டின் இணைகோட்டு அடிகோளை நிரூபிக்க முடியாது என்று திட்டவட்டமாகத் தெரியவந்தது. இணைகோட்டு அடிகோளை, ப்ளே:பேர் என்ற கணித வல்லுநர் அளித்த முறையில், அடியில் தருகிறோம்.

அடிகோள் 19 : கொடுத்துள்ள கோட்டிற்கு இணையாக, அதன் மேலமையாத, கொடுத்துள்ள ஒரு புள்ளி வழியாக, ஒரேயொரு கோடுதான் வரைய முடியும்.

இந்த வாக்கியத்தில் இரு உண்மைகள் அடங்கியிருப்பதைக் கவனிக்க. இதில் கூறியபடி "ஒரு இணைகோடு உள்ளது" என்பது தேற்றம் 19-ல் நிரூபிக்கப்பட்டது. "ஒன்றுதான் உள்ளது" என்பதே இந்த அடிகோளில் புதிதாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டது.

இந்த அடிகோளின் உதவியால், அறிமுறையில் 20, 21, 22ஆம் தேற்றங்களின் மறுதலேகளை இனி நிரூபிப்போம்.

*தேற்றம் 23

ஒரு சோடி இணைகோடுகளை ஒரு குறுக்குக் கோடு வெட்டுவதால் ஏற்படும்

(*a*) உள் அமைந்த ஒன்று விட்ட கோணங்கள் சர்வசமம்.

(*b*) ஒத்த சோடி கோணங்கள் சர்வசமம்.

(*c*) வெட்டுக் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் அமையும் உள் அமைக் கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகள்.

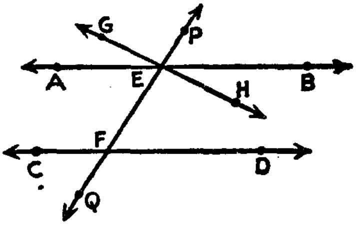
எடுகோள் : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. குறுக்கு வெட்டுக் கோடு $\overleftrightarrow{PQ}$ இவற்றை E, F-ல் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க :

(a) $\angle AEF \cong \angle DFE$

(b) $\angle PEB \cong \angle EFD$

(c) $\angle BEF$, $\angle EFD$ மிகை நிரப்பிகள்.



படம் 13-68.

நிரூபணம் :

பகுதி (a)

$\angle AEF$, $\angle DFE$ சர்வ சமமில்லை என வைத்துக் கொள்வோம். அப்படியானால் G என்ற புள்ளியை, G, D என்பன $\overleftrightarrow{PQ}$-க்கு எதிர்ப் புறங்களில் $\angle GEF \cong \angle EFD$ என்றமையுமாறு எடுத்துக் கொள்க.

அப்பொழுது $\overleftrightarrow{GE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ... (தேற்றம் 20)

அதாவது $\overleftrightarrow{EA} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (எடுகோள்)

ஆகவே $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EA}$ என்ற இரு கதிர்கள் $\overleftrightarrow{CD}$-க்கு இணையாகின்றன.

19 ஆம் அடிகோளுக்கு இது பொருந்தா முடிவு.

ஆகையால் $\angle AEF \cong \angle DFE$.

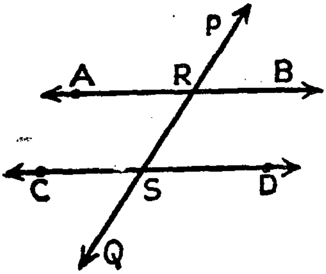
பகுதி (b)

விவரணம்	காரணம்
(1) $\angle AEF \cong \angle PEB$	குத்தெதிர்க் கோணங்கள்.
(2) $\angle AEF \cong \angle EFD$	(a) பகுதியில் நிரூபிக்கப் பட்டது.
(3) $\angle PEB \cong \angle EFD$	தொடருறவு.

பகுதி (c)

விவரணம்	காரணம்
(1) $m\angle AEF + m\angle BEF = 180$	கோட்டுக் கோண சோடி.
(2) $m\angle AEF = m\angle DFE$	(a) பகுதியில் நிரூபிக்கப் பட்டது.
(3) $m\angle BEF + m\angle DFE = 180$	படி 1, படி 2.

பயிற்சி 13·9

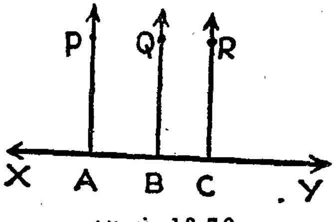


படம் 13-69.

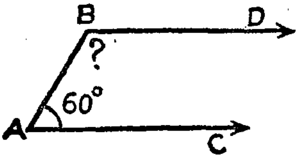
(1) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

$m\angle PRB = 65$. படத்திலுள்ள மற்ற எல்லாக் கோணங்களின் அளவுகளை எழுதுக.

(2) $\angle PAB$, $\angle QBC$, $\angle RCY$ செங்கோணங்கள். $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{RC}$ இணை என நிரூபிக்க.



படம் 13-70.



படம் 13-71.

(3) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ இணை. $\overline{AB}$ ஒரு வெட்டுக் கோட்டுத் துண்டு.

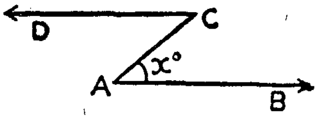
$m\angle A = 60$ என்றால், $m\angle B = ?$ ஏன்?

(4) *ABCD* என்ற நாற்கரத்தில், $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, $m\angle ABC = 115$ என்றால் $m\angle C$, $m\angle D$, $m\angle A$ என்ன ? ஏன் ?

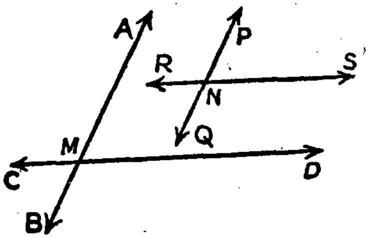
(5) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

$m\angle CAB = x$ என்றால்,

$m\angle ACD = ?$ ஏன் ?



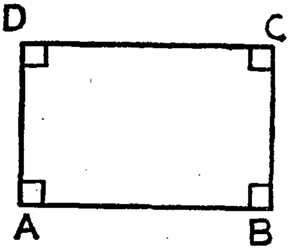
படம் 13-72.



படம் 13-73

(6) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{RS}$. $m\angle AMD = 50$ என்றால், $m\angle PNS = ?$ ஏன் ?

(7) *ABCD* ஒரு நாற்கரம். $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ செங்கோணங்கள். $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ என்றும் $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ என்றும் நிரூபிக்க : $\overline{AD} \perp \overline{DC}$ என்றும் நிரூபிக்க.



படம் 13-74.

(8) விடுபட்ட இடங்களைச் சரியாக நிரப்புக :

(i) ஒரு சோடி இணைக் கோடுகளை மற்றொரு கோடு குறுக்கே வெட்டினால், வெட்டுக் கோட்டின் ஒரே பக்கத்திலுள்ள உள் அமைக் கோணங்கள் ———.

(ii) ஒரு கோட்டிற்குத் செங்குத்தான ஒரு சோடி கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று ———.

(iii) $\overleftrightarrow{AB}$-க்கு $\overleftrightarrow{CD}$ செங்குத்தானால், $\overleftrightarrow{CD}$-க்கு இணையான $\overleftrightarrow{EF}$ என்னும் கோடு $\overleftrightarrow{AB}$-க்கு ———.

(iv) ஒரு கோணத்தின் புயங்களுக்கு இணையாக, வேறொரு புள்ளியிலிருந்து கதிர்கள் வரைந்தால் அவற்றால் ஏற்படும் கோணம், கொடுக்கப்பட்ட கோணத்திற்கு——அல்லது——

(9) ஒரு சோடி கோடுகள் இணையா என்று தெரிந்து கொள்வதற்குச் சோதனைகள் (i) —— (ii) —— (iii) ——

(10) l_1, l_2, l_3 என்பன மூன்று கோடுகள். $l_1 \parallel l_2$; $l_2 \parallel l_3$ எனில் $l_1 \parallel l_3$ என்று நிரூபிக்க :

(அடிகோள் 19 இங்கு மிக அவசியம் என்பதைக் காண்க.)

VI. மறுபடியும் முக்கோணங்கள்

பகுதி 1

§1. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் மொத்த அளவு டிகிரியில் 180. இதைச் செய்முறையில் முன் வகுப்புகளில் தெரிந்து கொண்டீர்கள்.

செய்முறையில் 180 என்று சரியாக எப்பொழுதும் விடை வரும் என்று சொல்ல முடியாது. 179½, 180½, 179, 181 என்று கூட விடை வருவது போல் காணப்படும். இது செய்முறையின் குறைபாடு. இத்தகைய குறைபாடின்றி, அறிமுறை நிறுவல் அடிப்படையில் இப்பொழுது முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் மொத்த அளவு 180 என நிரூபிப்போம். இதற்கு 19 ஆம் அடிகோள் தேவை.

§2. $\overleftrightarrow{AB}$ என்பது ஒரு கோடு. P என்பது அதற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளி என்று கொள்க. P-ன் வழியே $\overleftrightarrow{AB}$-க்கு எத்தனை இணை கோடுகள் வரைய முடியும்? ஒன்றா, இரண்டா, பலவா, ஒன்றுமேயில்லையா?

எல்லைக்குட்பட்ட ஒரு சமதளத்தைப் பற்றிய நம்முடைய அனுபவத்தைக் கொண்டு, ஒரு இணைகோடுதான் வரைய முடியும் என்று சொல்கிறோம். இதனை அடிகோளாகக் கொண்டு யூக்ளிட் வடிவ கணித உண்மைகள் பலவற்றை நிறுவலாம். அவற்றுள் ஒன்று தேற்றம் 24 (b).

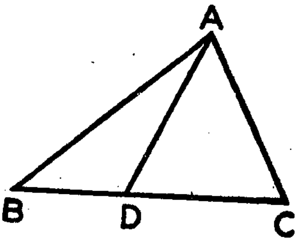
[குறிப்பு : இதை 'வெளிப்படை உண்மை' என்று வைத்துக் கொள்ளாமல், வேறுவித அடிகோள்களைக் கொண்டும், பல வடிவியல் உண்மைகளை நிறுவ முடியும். இவை யூக்ளிட் அல்லாத வடிவியல் அமைப்பைக் கொடுக்கும்.]

தேற்றம் 24 (a)

எல்லா முக்கோணங்களுக்கும், மூன்று கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதல் ஒரே எண் ஆயின், இவ்வெண் 180 ஆகும்.

எடுகோள் : *ABC* என்பது ஒரு முக்கோணம். *D* என்பது *BC*-ல் ஏதேனுமொரு புள்ளி.

ABC, *ABD*, *ADC* என்ற மூன்று முக்கோணங்களில் ஒவ்வொன்றின் கோண அளவுகளின் கூடுதலும் ஒரே எண். இவ்வெண்ணை *k* என்க.



படம் 13-75

நிரூபிக்க $k = 180$

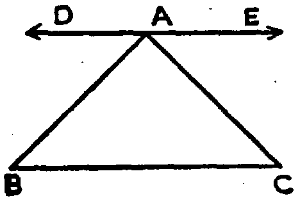
நிருபணம் :

விவரணம்	காரணம்
(1) $m\angle BAD + m\angle ADB + m\angle ABD = k$	எடுகோள்
(2) $m\angle DAC + m\angle ADC + m\angle ACD = k$	எடுகோள்
(3) $(m\angle BAD + m\angle DAC) + (m\angle ADB + m\angle ADC) + (m\angle ABD + m\angle ACD) = 2k$	படி 1, 2-ன் கூட்டுத்தொகை
(4) $m\angle BAC + 180 + m\angle ABC + m\angle ACB = 2k$	கோட்டுக் கோணசோடி
(5) $k + 180 = 2k$	எடுகோள்
(6) $k = 180$	நிரூபிக்கப்பட வேண்டியது

கவனிக்க : எல்லா முக்கோணங்களுக்கும் கோண அளவுகளின் கூடுதல் ஒரே எண் என்பதை அடிகோள் 19 ஐப் பயன்படுத்தாமல் நிரூபிக்க இயலாது. எனவே, ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் மொத்த அளவு 180 என்பதை நிறுவ, அடிகோள் 19 அவசியமாகும்.

***தேற்றம் 24 (b)**

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் மொத்த அளவு 180 ஆகும்.



படம் 13-76.

எடுகோள் : *ABC* ஒரு முக்கோணம்.

நிரூபிக்க :

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$

நிருபணம் : $\overline{BC}$-க்கு இணையாக *A*-ன் வழியே $\overleftrightarrow{DE}$ என்ற ஒரு கோடு வரை. *D-A-E* என்க.

விவரணம்	காரணம்
(1) $\angle ABC \cong \angle DAB$	$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$; $\overline{AB}$ குறுக்கு வெட்டி; உள் அடங்கிய ஒன்று விட்ட கோண சோடி
(2) $\angle ACB \cong \angle EAC$	$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$; $\overline{AC}$ குறுக்கு வெட்டி: உள் அடங்கிய ஒன்று விட்ட கோண சோடி.
(3) $m\angle DAC = m\angle BAC + m\angle DAB$	கோணங்களின் கூட்டல் அடிகோள்.
(4) $m\angle EAC + m\angle DAC = 180$	கோட்டுக் கோண சோடி.
(5) $m\angle EAC + m\angle BAC + m\angle DAB = 180$	3-ன் படி.
(6) $m\angle ACB + m\angle BAC + m\angle ABC = 180$	1, 2-ன் படி.
(7) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$	சுருங்கச் கூறுவது

கிளைத்தேற்றம் 1

இரு முக்கோணங்களில் ஒன்றின் இரண்டு கோணங்கள், மற்றொன்றின் இரண்டு கோணங்களுக்குச் சர்வ சமமானால், அவற்றின் மூன்றாவது கோணங்களும் சர்வ சமம்.

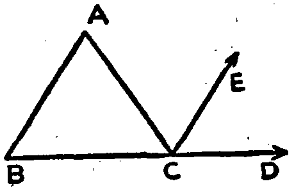
இதன் நிரூபணத்தைத் தருக.

கிளைத்தேற்றம் 2

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒருபுறக் கோண அளவு, அதன் உள் எதிர் கோணங்கள் இரண்டின் மொத்த அளவுக்குச் சமம்.

எடுகோள் : $\triangle ABC$-ல் B-C-D

நிரூபிக்க : $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$.



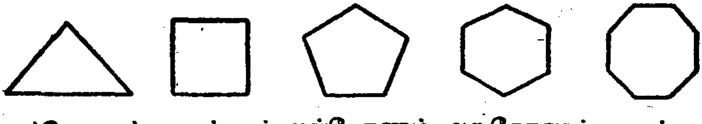
நிரூபணம் :

படம் 13-77.

விவரணம்	காரணம்
(1) $m\angle ACB + m\angle ACD = 180$	கோட்டுக் கோணச் சோடி
(2) $m\angle ACB + m\angle A + m\angle B = 180$	தேற்றம் 24
(3) $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$	படி 1, படி 2

§3.

(a)

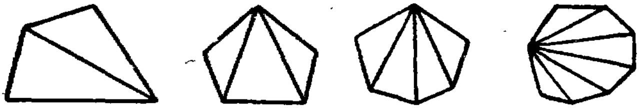


படம் 13-78.

இவைபோன்றவற்றிற்குப் பொதுப் பெயர் பலகோணங்கள் (Polygons) என்பதாகும்.

(b) ஒரு பலகோணத்தின் எல்லாப் பக்கங்களும் சர்வசம மாயும், எல்லாக் கோணங்களும் சர்வசமமாயுமிருந்தால், அது ஒழுங்குப் பலகோணம் (Regular Polygon) எனப்படும்.

(c)



படம் 13-79.

4 பக்கங்கள்	5 பக்கங்கள்	6 பக்கங்கள்	8 பக்கங்கள்
2 முக்கோணங்கள்	3 முக்கோணங்கள்	4 முக்கோணங்கள்	6 முக்கோணங்கள்

இதிலிருந்து ஏதாவது அமைப்புச்சீர் (Pattern) தெரிகிறதா ?

பலகோணத்திற்கு 10 பக்கங்களானால், ஒரே புள்ளியின் வழியே எத்தனை மூலை விட்டங்கள் வரும் ? எத்தனை முக்கோணங் களாக அப் பலகோணம் பிரிபடும் ? n பக்கங்களானால் உன் விடை யென்ன ?

(d) ஒரு பலகோணத்திற்கு n பக்கங்களானால், அதன் கோணங்களின் மொத்த அளவு $180(n-2)$ என நிரூபி

(e) n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்கான பலகோணத்தின் ஒவ்வோர் உள் கோண அளவு $\frac{(2n-4)}{n} \times 90$ என நிரூபி.

பயிற்சி 13·10

(1) a, b, x இவைகட்குள்ள சம்பந்தம் என்ன ? (படம் 13-80).

படம் 13-80

(2) ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு புறக் கோணம் 125. அதன் ஓர் உள் அமைக் கோணம் 55. மற்றோர் உள் அமைக் கோணத்தின் அளவென்ன ? முக்கோணத்தின் மூன்றாவது கோண அளவு என்ன ? இதன் விடையை இரு வழிகளில் கண்டுபிடித்துத் தேற்றத்துடன் விளக்குக.

(3) ஒரு முககோணத்தின் மூன்று கோண அளவுகள் (a) 1 : 2 : 3 (b) 1 : 1 : 2. ஒவ்வொரு கோண அளவையும் கண்டு பிடிக்கவும்.

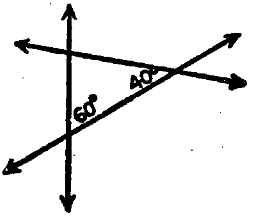
ஒவ்வொரு முக்கோணமும் எவ்வகை ? ஏன் ?

(4) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு கோண அளவும் என்ன ? ஒவ்வொரு வெளிக் கோணத்தின் அளவும் என்ன ?

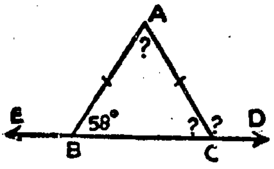
(5) இரு சமபக்க முக்கோணம் ஒன்றின் சமமான அடிப் பக்க கோணங்கள், உச்சிக் கோணத்தைப் போல இரு மடங்கு. முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு கோண அளவும் என்ன ?

(6) "ஒரு முக்கோணத்தில் இரு கோணங்கள் விரிகோணங்களாகவோ, செங்கோணங்களாகவோ இருக்க முடியாது." என்பதற்குக் காரணம் கூறுக.

(7) படம் 13-81-ல் காட்டிய அளவுகளைக் கொண்டு மற்ற எல்லாக் கோண அளவுகளையும் கண்டு பிடிக்கவும்.



படம் 13-81.



படம் 13-82

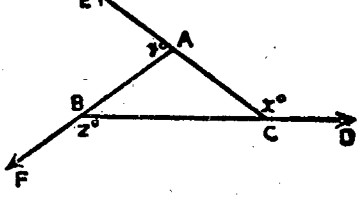
(8) படம் 13-82-ல் ? இக் குறிப்பிட்ட கோண அளவுகளைக் காரணத்துடன் கூறுக.

(9) Δ ABC-ல் கோணம் A, கோணம் B ஐ விட (டிகிரி) அளவில் 20 அதிகம். கோணம் B, கோணம் C ஐ விட அளவில் 20 அதிகம். ஒவ்வொரு கோண அளவையும் கண்டுபிடி.

(10) இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு கோண அளவும் என்ன ?

(11) படம் 13-83-ல் உள்ள கோண அளவுகள் $x + y + z = ?$ ஏன் ?

(12) ஒழுங்கான நாற்கரம், ஐங்கோணம், அறு கோணம், எண் கோணம் இவை ஒவ்வொன்றின் புறக்கோண அளவு என்ன ?

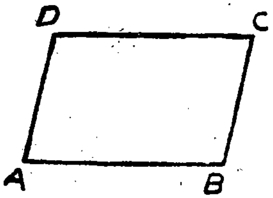


படம் 13-83.

VII. இணைகரங்கள்

§ 1. நாற்கரங்களில் சிறப்பு வடிவங்கள் சில உண்டு. (எடுத்துக் காட்டுகள்) : சதுரம், செவ்வகம், இணைகரம், சாய்சதுரம், டிரபீசியம். இவற்றின் வரையறைகளை நினைவுபடுத்திக் கொள்ளவும். இங்கு இணைகரத்தைப் பற்றிய சில தேற்றங்களை நிரூபிப்போம்.

வரையறை : ஒரு நாற்கரத்தின் ஒவ்வொரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்களும் இணையானால், அஃது ஓர் இணைகரம் (Parallelogram) எனப்படும்.

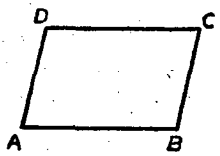


படம் 13-84.

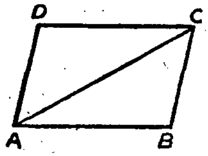
படத்தில் $ABCD$ என்பது இணைகரம். $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ என்பன இதன் மூலைவிட்டங்கள். இவை எப்போதும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும். (ஏன் ?).

•தேற்றம் 25

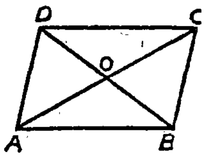
ஓர் இணைகரத்தில் (i) ஒவ்வொரு சோடி எதிர் கோணங்கள் சர்வசமம். (ii) ஒவ்வொரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் சர்வசமம். (iii) இரு மூலை விட்டங்களும் ஒன்றையொன்று சமக் கூறிடும்.



படம் 13-85 (a).



படம் 13-85 (b).



படம் 13-85 (c).

எடுகோள் : $ABCD$ ஓர் இணைகரம். $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ என்பன O வில் வெட்டுகின்றன.

நிரூபிக்க :

(i) $m\angle A = m\angle C$; $m\angle B = m\angle D$

(ii) $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$; $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$

(iii) $\overline{AO} \equiv \overline{OC}$; $\overline{BO} \equiv \overline{OD}$

நிருபணம் :

பகுதி 1

(படம் 13-85 (a) ஐப் பார்க்க)

விவரணம்	காரணம்
(1) $m\angle A + m\angle B = 180$	$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$; $\overline{AB}$ குறுக்கு வெட்டி; அதன் ஒரே பக்கத்திலுள்ள உள் அமை கோணச் சோடி.
(2) $m\angle A + m\angle D = 180$	$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $\overline{AD}$ குறுக்கு வெட்டி; அதன் ஒரே பக்கத்திலுள்ள உள் அமை கோணச் சோடி.
(3) $m\angle B = m\angle D$	படி 1, படி 2
(4) $m\angle A = m\angle C$	படி 1, 2, 3-ல் உள்ளது போல நிருபித்து அறிவது.

பகுதி 2

(படம் 13-85 (b) ஐப் பார்க்க)

$\triangle ABC$, $\triangle ADC$-ல் $ABC \leftrightarrow ADC$ என்று பொருத்தம் செய்க.

விவரணம்	காரணம்
(1) $m\angle BAC = m\angle DCA$	$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $\overline{AC}$ குறுக்கு வெட்டி; ஒரு சோடி உள் அமை ஒன்று விட்ட கோணங்கள்.
(2) $m\angle BCA = m\angle DAC$	$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $\overline{AC}$ குறுக்கு வெட்டி; ஒரு சோடி உள் அமை ஒன்று விட்ட கோணங்கள்.
(3) $\overline{AC} \equiv \overline{AC}$	மீட்புப் பண்பு
(4) $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$	கோ-ப-கோ-அடிகோள்
(5) $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$; $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$	முக்கோண சர்வ சமப் பண்பு

பகுதி 3

(படம் 13-85 (c) ஐப் பார்க்க)

$\triangle AOB$, $\triangle COD$ ஐ $AOB \leftrightarrow COD$ என்றவாறு ஒப்பிடுக.

விவரணம்	காரணம்
(1) $m\angle BAO = m\angle DCO$	(ஏன் ?)
(2) $m\angle AOB = m\angle COD$	(ஏன் ?)
(3) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	(ஏன் ?)
(4) $\triangle AOB \cong \triangle COD$	கோ-ப-கோ-அடிகோள்
(5) $\overline{AO} \cong \overline{CO}$; $\overline{BO} \cong \overline{DO}$	சர்வசமப் பண்பு

இங்கு இணைகர வடிவம் கொடுக்கப்பட்டது; பக்க, கோண, மூலைவிட்டப் பகுதி பற்றிய தன்மைகள் நிருபிக்கப்பட்டன.

இத் தேற்றத்தின் மறுதலையை நாம் கூற வேண்டுமானால் நிருபிக்க வேண்டிய பாகம் 'இணைகரம்' என்பதாகும். ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட வடிவத்தை, குறிப்பிட்ட தன்மைகளுள்ள நாற்கரமாகக் கொள்ள வேண்டும்.

மறுதலைத் தேற்றத்தின் பொது விவரணம் பின் வருமாறு அமையும்.

தேற்றம் 25-ன் மறுதலை

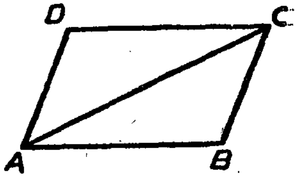
ஒரு நாற்கரத்தில் (i) ஒவ்வொரு சோடி எதிர் கோணங்களின் அளவுகள் சமமானால் அல்லது (ii) ஒவ்வொரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்களின் அளவுகள் சமமானால், அல்லது (iii) இரு மூலை விட்டங்களும், ஒன்றையொன்று இரு சமக் கூறிட்டால் அந்த நாற்கரம், இணைகரம் ஆகும்.

பயிற்சி 13·11

மறுதலைத் தேற்றத்தின் ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் நிரூபணம் தருக.

கிளைத்தேற்றம்

ஒரு குவி நாற்கரத்தின் ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் இணையாயும், அளவில் சமமாயுமிருந்தால், அஃது இணைகரமாகும்.



படம் 13-86.

எடுகோள் :

ABCD ஒரு குவி நாற்கரம். அதில் $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

நிரூபிக்க :

ABCD ஓர் இணைகரம்.

நிரூபணம் :

$\triangle ABC$, $\triangle CDA$-ல் $ABC \leftrightarrow CDA$ என்ற பொருத்தத்தைக் கவனிக்க :

விவரணம்	காரணம்
(1) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	எடுகோள்
(2) $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	மீட்புத் தொடர்பு
(3) $\angle BAC \cong \angle DCA$	$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; AC குறுக்கு வெட்டி. ஒரு சோடி உள் அமை ஒன்று விட்ட கோணங்கள்.
(4) $\triangle ABC \cong \triangle ADC$	ப-கோ-ப-அடிகோள்
(5) $m\angle BCA = m\angle DAC$	சர்வசமப் பண்பு
(6) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	தேற்றம் 20
(7) *ABCD* ஓர் இணைகரம்	எடுகோள், வரையறை

பயிற்சி 13·12

(1) ABCD ஒரு சதுரம் : $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ என நிறுவி.

(2) ஒரு செவ்வகத்தின் இரு மூலைவிட்டங்களும் அளவிச்சமம் என நிறுவி.

(3) சதுரம், செவ்வகம், இவை ஒவ்வொன்றிலும், பக்க அளவுகள், கோண அளவுகள், மூலைவிட்ட அளவுகள், மூலைவிட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் தன்மை, இவை பற்றி சிறப்புப் பண்புகளை விவரிக்க.

(4) பின் வருபவற்றுள் எவை மெய்யானவை? எவை மெய்யற்றவை ?

(i) சதுரம் என்பது ஒரு சமபக்க செவ்வகம்.

(ii) சமபக்க இணைகரம் என்பது சாய் சதுரம்.

(iii) சமகோண இணைகரம் என்பது சதுரம்.

(iv) ஓர் இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன.

(v) ஒரு சாய் சதுரத்தின் இரு மூலை விட்டங்கள் சர்வசமம்.

(vi) ஒரு சதுரத்தின் இரு மூலை விட்டங்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன.

(vii) ஒரு செவ்வகத்தின் இரு மூலை விட்டங்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன.

(viii) ஒரு சாய் சதுரத்தின் இரு மூலை விட்டங்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன.

(ix) ஓர் இணைகரத்தின் அடுத்துள்ள கோணங்கள் சர்வசமம்

(x) ஒரு நாற்கரகத்தின் இரு மூலை விட்டங்களும் ஒன்றை ஒன்று சமக் கூறிட்டால் அது ஓர் இணைகரம்.

(5) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ என்பன இணை கோடுகள். P, Q என்பன $\overleftrightarrow{AB}$-ல் ஏதேனும் இரு புள்ளிகள். P, Q வழியே $\overleftrightarrow{CD}$-க்கு வரையப்

பட்ட செங்குத்துக் கோடுகள் $\overleftrightarrow{CD}$ ஐ முறையே *L*, *M*-ல் வெட்டு கின்றன. *PL* = *QM* என்று காட்டுக.

(PL ஐ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$-க்கு இடையேயுள்ள தூரம் என்கிறோம்.)

(6) *ABCD* என்ற இணைகரத்தில் *P*, *R* என்பன முறையே $\overline{AB}$, $\overline{CD}$-ல் புள்ளிகள். *AP* = *CR* எனில் *APCR*, *BPDR* என்பன இணைகரங்கள் எனக் காட்டுக.

(7) *ABC* ஒரு முக்கோணம். *E* என்பது *AC*-ன் மையப் புள்ளி. *B-E-D*, *BE* = *ED* என்றவாறு *D* என்பது ஒரு புள்ளி *ABCD* ஓர் இணைகரம் என்று காட்டுக.

(8) *ABCD* ஓர் இணைகரம். *D-C-F*, $\overline{DC} = \overline{CF}$ என்றவாறு *F* என்ற புள்ளி அமைந்துள்ளது. $\overline{AF}$, $\overline{BC}$ என்பன ஒன்றை யொன்று சமக் கூறிடும் என்று காட்டுக.

(9) *A*, *B*, *C* என்பன *l* எனும் ஒரு கோட்டிலுள்ள புள்ளிகள். $\overline{LA}$, $\overline{MB}$, $\overline{NC}$ என்பன, *l*-க்குச் செங்குத்தாக, *l*-க்கு ஒரே பக்கத்தில் அமைந்துள்ள கோட்டுத் துண்டுகள் *AL* = *BM* = *CN* எனில்,

(i) $\overline{LM} \parallel \overline{AB}$, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ என்று காட்டுக.

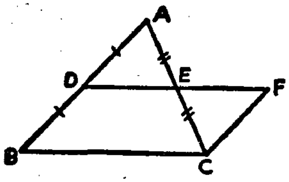
(ii) *L*, *M*, *N* ஒரு கோட்டிலமையுமென்று காட்டுக.

VIII. இரு முக்கியத் தேற்றங்கள்

இணைகரத்தின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி, மேலும் இரண்டு தேற்றங்களை இங்குக் காண்போம்.

*தேற்றம் 26

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளை முனைப்புள்ளிகளாகக்கொண்ட கோட்டுத் துண்டு மூன்றாவது பக்கத்தின் அளவில் பாதி அளவுள்ளது. மேலும், அது மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை.



படம் 13-87.

எடுகோள்: $\triangle ABC$-ல் D, E என்பவை $\overline{AB}$, $\overline{AC}$-ன் நடுப் புள்ளிகள்.

நிரூபிக்க: $DE = \frac{1}{2} BC$, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

நிரூபணம்: D—E—F.

DE = EF என்றவாறு F என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க.

$\triangle CEF$, $\triangle AED$ ஐ $CEF \leftrightarrow AED$ என்ற ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தத் தொடர்பில் ஒப்பிடு.

	விவரணம்	காரணம்
(1)	$\overline{CE} \cong \overline{AE}$	எடுகோள்
(2)	$\overline{EF} \cong \overline{ED}$	அமைப்பு
(3)	$\angle CEF \cong \angle AED$	குத்தெதிர்க் கோணங்கள்
(4)	$\triangle CEF \cong \triangle AED$	ப-கோ-ப-அடிகோள்
(5)	$m\angle ECF \cong m\angle EAD$	சர்வசமப் பண்பு
(6)	$\overline{CF} \parallel \overline{DA}$	தேற்றம் 20
(7)	$\overline{CF} \cong \overline{DA}$	படி 4, சர்வசமப் பண்பு
(8)	$\overline{AD} \cong \overline{BD}$	எடுகோள்
(9)	$\overline{BD} \parallel \overline{CF}$; $\overline{BD} \cong \overline{CF}$	6, 7, 8 படிகளால்
(10)	BCFD இணைகரம்	கிளைத்தேற்றம்
(11)	$\overline{DF} \parallel \overline{BC}$; $DF = BC$	இணைகரத்தின் பண்பு
(12)	$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$; $DE = \frac{1}{2} BC$	E என்பது $\overline{DF}$-ன் நடுப்புள்ளி

பயிற்சி 13·13

(1) தேற்றம் 26-ன் படி படத்தில் AFCD இணைகரம் என நிரூபி.

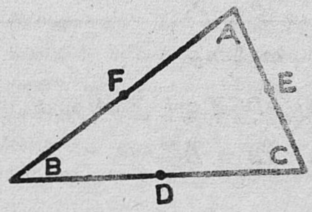
(2) ABC என்ற முக்கோணத்தில் D, E, F என்பன முறையே $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$-ன் நடுப்புள்ளிகள் (படம் 13-88) விடுபட்ட இடங்களைச் சரியாய் நிரப்புக.

I. (i) $\overline{FE}$ —— $\overline{BC}$: $FE =$ ——BC

(ii) $\overline{DF}$ —— $\overline{AC}$:
$DF =$ —— AC

(iii) $\overline{DE}$ —— $\overline{AB}$:
$DE = \frac{1}{2}$ ——

II. BFED, DFEC, AEDF இணைகரங்கள் என நிரூபிக்கவும்.

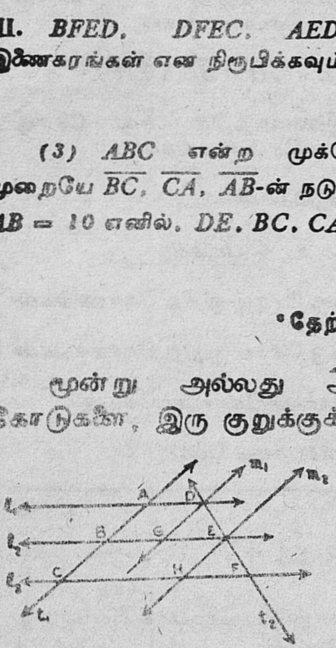


படம் 13-88.

(3) ABC என்ற முக்கோணத்தில் D, E, F என்பன முறையே $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$-ன் நடுப்புள்ளிகள். $EF = 3$, $FD = 6$, $AB = 10$ எனில், DE, BC, CA-ன் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

•தேற்றம் 27

மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இணை கோடுகளை, இரு குறுக்குக் கோடுகள் வெட்டும் போது, ஒன்றின் வெட்டுத் துண்டுகள் சர்வ சமமானால், மற்றொன்றின் வெட்டுத் துண்டுகளும் சர்வசமமாகும்.



படம் 13-89.

எடுகோள் : l_1, l_2, l_3 இணை கோடுகள். இவற்றை t_1, t_2 வெட்டுகின்றன. l_1, l_2, l_3-ல் t_1 ஆல் ஏற்படும் வெட்டுத் துண்டுகள் $\overline{AB}$, $\overline{BC}$. t_2 ஆல் ஏற்படும் வெட்டுத் துண்டுகள் $\overline{DE}$, $\overline{EF}$. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

நிரூபிக்க : $\overline{DE} \cong \overline{EF}$

நிரூபணம் : D, E-ன் வழியாக t_1-க்கு இணையாக உள்ள கோடுகள் m_1, m_2. அவை l_2, l_3 ஐ முறையே G, H-ல் வெட்டட்டும்.

விவரணம்	காரணம்
(1) $m_1 \parallel m_2$	இரண்டும் t_1-க்கு இணை
(2) $ADGB$ ஓர் இணைகரம்	$\overline{AB} \parallel \overline{DG}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BG}$
(3) $\overline{AB} \cong \overline{DG}$	இணைகரத்தின் ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள்
(4) $BEHC$ ஓர் இணைகரம்	$\overline{BE} \parallel \overline{CH}$; $\overline{BC} \parallel \overline{EH}$
(5) $\overline{BC} \cong \overline{EH}$	இணைகரத்தின் ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள்
(6) $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	எடுகோள்
(7) $\overline{DG} \cong \overline{EH}$	3, 5, 6 படிகள்
(8) $m\angle GDE \cong m\angle HEF$	ஒரு சோடி ஒத்த கோணங்கள்
(9) $m\angle DEG \cong m\angle EFH$	ஒரு சோடி ஒத்த கோணங்கள்
(10) $\triangle GDE \cong \triangle HEF$	கோ-ப-கோ-அடிகோள்
(11) $\overline{DE} \cong \overline{EF}$	சர்வ சமப் பண்பு

பயிற்சி 13·14

(1) சம இடைவெளிவிட்டுக் கோடுபோட்ட பக்கமொன்றை உன் நோட்டிலிருந்து எடுத்துக்கொள். (அதன் ஓதுக்குக் கோட்டில் (margin) ஏற்படும் வெட்டுத் துண்டுகள் சர்வசமம் எனக் கொள்க) மற்றொரு குறுக்குக் கோடு வரைந்து, அதில் ஏற்படும் வெட்டுத் துண்டுகள் சர்வசமமா என்று சோதித்துப் பார்.

(2) $m(\overline{AB}) = 6$ இருக்குமாறு $\overline{AB}$ என்ற கோட்டுத் துண்டு வரைந்து அதை 5 சமபாகங்களாக்குக. செய்முறையை விவரிக்க நிரூபணம் என்ன ?

(3) $PQ = 12$ என்றுள்ள கோட்டுத் துண்டு வரை அதை 3 : 5 என்ற விகித அளவில் இரு பாகங்களாக்குக.

IX. நியமப்பாதைகள்

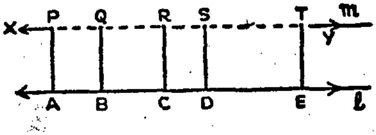
§1. (i) கம்பசைப் பயன்படுத்தி நீங்கள் வட்டம் வரைந்திருக்கிறீர்கள். ஊசி முனையை ஒரு புள்ளியில் வைத்து, சௌகரியமான கோட்டுத் துண்டின் அளவை ஆரமாகக் கொண்டு, பென்சில் முனையால் வட்டம் வரைகிறோம். பென்சில் முனை, ஊசி முனையிலிருந்து மாறாத, குறிப்பிட்ட தூரத்திலேயே நகருகிறது. இவ்வாறு நகரும் புள்ளியின் பாதை ஒரு வட்டமாகும்.

(ii) இவ் வட்டத்தின் மேல் பல புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றை வட்ட மையத்திற்குச் சேர்த்தால், எல்லாக் கோட்டுத் துண்டுகளும் சம அளவுள்ளவை ஆகும்.

இந்த எடுத்துக்காட்டைக் கொண்டு **நியமப்பாதை** என்னும் கருத்தை விளக்குவோம். **கொடுக்கப்பட்டவை :** (i) திட்டமான ஒரு புள்ளி. (ii) அதிலிருந்து திட்டமான தூரத்தில் நகரும் ஒரு புள்ளி. **கேட்கப்பட்டது :** நகரும் புள்ளியின் பாதை. **விடை :** வட்டம்.

§2. (i) $A, B, C, D, E, \ldots$ என்பன l எனும் கோட்டின் மேலுள்ள புள்ளிகள். l-ன் ஒரு பக்கத்தில் $\overline{PA}, \overline{QB}, \overline{RC}, \overline{SD}, \overline{TE}, \ldots$ என்பன l-க்குச் செங்குத்தாக உள்ள சம அளவுள்ள கோட்டுத் துண்டுகள். $P, Q, R, S, T \ldots$ என்பன ஒரே கோட்டிலிருக்கும். அக் கோடு $\overleftrightarrow{AB}$-க்கு இணையாகும் என்பதை அறிவீர்கள். படத்தில் $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{XY}$ இணை கோடுகள்.

l, m இணைகோடுகள். m-ல் $P, Q, R, S, T \ldots$ என்ற பல புள்ளிகளிலிருந்து $\overline{PA}, \overline{QB}, \overline{RC}, \overline{SD} \ldots$ என, படத்தில் காட்டியபடி செங்குத்துகள் வரைந்தால் இக் கோட்டுத் துண்டுகள் சர்வசமமாகும்.



படம் 13-90.

மேற் கூறிய விவரணத்தில் இரு அம்சங்கள் அடங்கி இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

(1) கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு நகரும் புள்ளியின் பாதை என்ன என்கிறோம்.

(2) அப் பாதையில் எந்தப் புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டாலும், அதற்கு அந்த நிபந்தனை பொருந்தும் என்று காட்டு

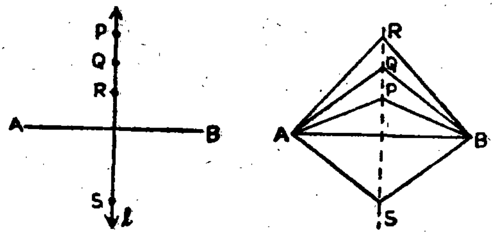
கிரேம். இதுதான் நியமப்பாதை என்னும் கருத்தின் அடிப்படை.

குறிப்பு : முதல் படத்தில் *P, Q, R, S, T* ... ஐ *l*-க்கு மறுபக்கத்திலும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஆகவே, மற்றொரு கோடு *l*-க்கு இணையாக, எதிர்ப்புறத்திலும் அமையும். இந்தக் கருத்தை, ஒரு தேற்றமாக அடியில் குறிப்போம்.

தேற்றம் 28

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோட்டிலிருந்து, சம தூரத்தில் நகரும் ஒரு புள்ளியின் நியமப்பாதை, அக் கோட்டிற்கு, அதே தூரத்தில், இருபுறமும் அமையும் ஒரு சோடி இணை கோடுகள்.

§ 3. $\overline{AB}$ என்னும் கோட்டுத் துண்டின் மையக் குத்துக்கோடு *l* வரை. அதில் *P, Q, R, S* ... என்ற புள்ளிகளைக் குறித்து, ஒவ்வொன்றையும் *A, B* உடன் சேர். $\overline{PA}$, $\overline{PB}$; $\overline{QA}$, $\overline{QB}$; $\overline{RA}$, $\overline{RB}$; $\overline{SA}$, $\overline{SB}$; ... ஐ அள. ஒவ்வொரு சோடி கோட்டுத் துண்டுகளும் அளவில் சமமாகும்.



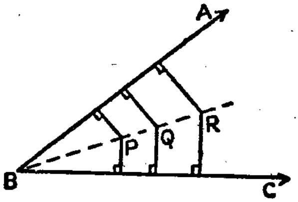
படம் 13-91.

இதன் மறுதலை பின்வருமாறு : $\overline{AB}$ என்ற கோட்டுத் துண்டு வரை. *P* என்ற ஒரு புள்ளியை *A, B*,-லிருந்து சமதூரத்திலிருக்குமாறு குறி. இவ்வாறே *Q, R, S* ... என்ற புள்ளிகளையும் குறி. இவை எத்தகைய பாதையில் அமைவது போல் காணப்படுகின்றன ? $\overline{AB}$-ன் நடுப் புள்ளியும் இத்தகைய புள்ளிகளில் ஒன்றல்லவா ? இச் செய்முறையின் பயனால் நாம் பின்வரும் தேற்றத்தின் உண்மையைக் காண்கிறோம்.

தேற்றம் 29

ஒரு கோட்டுத் துண்டின் இரு முனைகளுக்கும் சம அளவு தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை, அந்தக் கோட்டுத் துண்டின் மையக்குத்துக் கோடு ஆகும்.

§ 4. $\angle ABC$ ஒரு கோணம். அதன் உட்புறத்தில் $P, Q, R, \ldots$ என்ற புள்ளிகள் கோணப் புயங்களிலிருந்து சம தூரத்தில் இருக்குமாறு எடுத்துக்கொள்ளப் படுகின்றன. ஒரு காகிதத்தில் இப் படத்தின் நகல் ஒன்றை எடுத்துக் கொள். $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$-ன் மீது படியு மாறு காகிதத்தை மடி. இப்பொழுது $P, Q, R, \ldots$ எங்கு உள்ளன? $P, Q, R, \ldots$ அனைத்தும் மடிப்புக் கோட்டில் அமைவதையும் இக் கோடு B வழியே செல்வதையும் காண்க. மேலும், $\angle PBC \cong \angle ABP$ என்பதும் தெரிகிறது. எனவே, $\overrightarrow{BP}$ ஆனது $\angle ABC$ ஐ இரு சமக் கூறிடுகிறது. இக் கதிரினை $\angle ABC$-ன் இருசம வெட்டி என்போம். இரு சமவெட்டியில் வேறு புள்ளிகள் எடுத்து, அவை ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் BC, BA-க்குக் செங்குத்துக் கோடுகள் வரைந்தால் அவை ஒவ்வொரு சோடியும் சம அளவுள்ளதாகக் காணப்படும்.



படம் 13-92.

இந்தச் செய்முறையிலிருந்து ஏற்படும் தேற்றம் பின் வருமாறு:

தேற்றம் 30

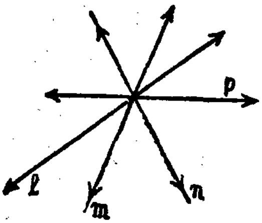
ஒரு கோணத்தின் புயங்களிலிருந்து சம தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை அக் கோணத்தின் இரு சமவெட்டியாகும்.

X. ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்

§ 1. ஒரு முக்கோணத்திற்கு மூன்று பக்கங்களும், மூன்று கோணங்களும் முக்கியமானவை. இவை தவிர முக்கோணத் துடன் சம்பந்தப்பட்ட சில கோட்டுக் கணங்கள் உண்டு.

அவற்றின் தன்மைகளை, செய்முறை, காகித மடிப்பு முறையில் இங்குக் குறிப்பிடுவோம்.

முதலில் சில முக்கிய கலைச் சொற்களையும் அவற்றின் வரையறையையும் தெரிந்து கொள்ள வேண்டும்.



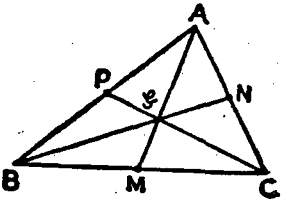
படம் 13-93.

§2. (i) மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் வெட்டிக் கொண்டால் அவை ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் (Concurrent lines) எனப்படும்.

(ii) மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைந்தால் அவை ஒரே கோட்டிலமை புள்ளிகள் (Collinear points) எனப்படும்.

படம் 13-94.

§3. படத்தில் M, N, P, முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடும் புள்ளிகள். $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$ என்பவை முக்கோணத்தின் மையக் கோடுகள் (medians) எனப்படும்.



படம் 13-95.

காகிதத்தில் ஒரு முக்கோணம் வெட்டி எடுத்து காகித மடிப்பின் மூலம் மூன்று மையக் கோடுகளைக் காண்பித்து அவை ஒரு புள்ளி வழியே செல்கின்றனவா என்பதைச் சோதிக்கவும்.

செய் முறையிலும் செய்து, நீங்கள் காண்பதை விவரிக்கவும். மேலும் இவை சந்திக்கும் புள்ளி G எனில், GA, GB, GC, GM GN, GP ஆகியவற்றை அளக்க. இம்மாதிரி இன்னும் நான்கு முக்கோணங்கள் வரைந்து அளந்து உன் விடைகளை அட்டவணைப் படுத்துக.

முக்கோணம்	GA	GB	GC	GM	GN	GP	$\frac{GA}{GM}$	$\frac{GB}{GN}$	$\frac{GC}{GP}$
1									
2									
3									
4									
5									

கடைசி மூன்று நிரல்களிலிருந்து நீ காண்பதென்ன?

இப் பரிசோதனைகளிலிருந்து அடியிற்கண்ட தேற்றத்தின் உண்மை புலனாகும்.

தேற்றம் 31

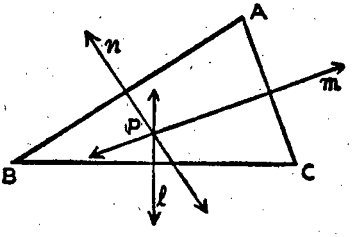
ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று மையக் கோடுகளும் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும்; இப் புள்ளி ஒவ்வொரு மையக் கோட்டையும் (உச்சியிலிருந்து) 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

§ 4.

தேற்றம் 32

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் மையக் குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும்.

எடுகோள்: *ABC* என்ற முக்கோணத்தில் *l*, *m*, *n* என்பன முறையே $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$-க்கு மையக் குத்துக் கோடுகள்.



படம் 13-96.

நிரூபிக்க: *l*, *m*, *n* ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும்.

நிரூபணம் :

விவரணம்	காரணம்
(1) l, m என்பன வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி P என்க.	$\overline{AC}$, $\overline{BC}$ வெட்டிக்கொள் கின்றன.
(2) $\overline{PB} \equiv \overline{PC}$	P, l மீதுள்ளது
(3) $\overline{PC} \equiv \overline{PA}$	P, m மீதுள்ளது
(4) $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$	படி 2, 3
(5) P, n மீதுள்ளது	$\overline{AB}$-ன் மையக் குத்துக்கோடு n

இப் புள்ளிக்குச் சுற்று வட்ட மையம் என்பது பெயர். சுற்று வட்ட மையத்தை மையமாகவும், அதற்கும் முக்கோணத்தின் ஓர் உச்சிக்கும் இடையிலுள்ள தூரத்தை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம், முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகளின் வழியேயும் செல்லும். இதற்கு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் என்று பெயர்.

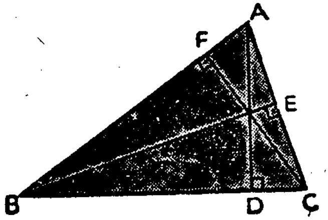
§ 5. ஒரு முக்கோணம் வரைந்து, அதன் ஒவ்வொரு கோணத்தின் இரு சமவெட்டி வரைக. (இதற்குப் பாகை மானியைப் பயன்படுத்துக). இந்த மூன்றும் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளா ? இன்னும் சில முக்கோணங்கள் வரைந்து அடியிலுள்ள தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க.

தேற்றம் 33

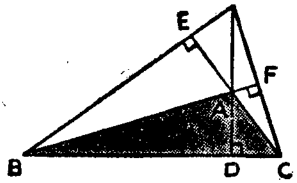
ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகள் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும்.

இப் புள்ளிக்கு உள் வட்ட மையம் என்று பெயர். உள் வட்ட மையத்தின் ஆர அளவு என்ன ? உள் வட்டம் எவ்வாறு வரைவது ?

6. *ABC* என்னும் முக்கோணம் வரைக. படத்திலுள்ளவை போல $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{CF}$, என்பவற்றை முறையே $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$-க்குச் செங்குத்தாக வரைக. $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{CF}$ மூன்றும் ஒரு புள்ளி வழியே



படம் 13-97 (a).



படம் 13-97 (b).

செல்கின்றனவா? இம் மாதிரி இன்னும் சில முக்கோணங்கள் வரைந்து அடியிற்கண்ட தேற்றத்தைச் சரி பார்க்க.

தேற்றம் 34

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒவ்வோர் உச்சி வழியாகவும் எதிர்ப்பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தாகவும் அமைந்துள்ள மூன்று கோடுகளும் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும்.

இப் புள்ளிக்குச் செங்கோட்டு மையம் என்று பெயர்.

பயிற்சி 13·15

(1) அறிமுறையில் தேற்றம் 33 ஐ நிறுவுக.

(2) *ABC* என்பது ஒரு முக்கோணம். *B*, *C*-ல் உள்ள வெளிக் கோணங்களின் இரு சமவெட்டி (கோடு)யும், $\angle A$-ன் இரு சம வெட்டியும் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும் என்று நிரூபிக்க.

(3) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின்

(i) செங்கோட்டு மையம் யாது?

(ii) சுற்று வட்ட மையம் யாது?

(4) ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம், உள் வட்ட மையம், செங்கோட்டு மையம் ஆகியவை ஒரே கோட்டில் அமைந்துள்ளன என்று காட்டு.

(5) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம், உள் வட்ட மையம், செங்கோட்டு மையம் ஆகியவை ஒரே புள்ளியெனக் காட்டுக.

(6) விடுபட்ட இடங்களைச் சரியாக நிரப்பு:

(a) ஒரு விரிகோண முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் முக்கோணத்திற்கு ——— அமைகிறது.

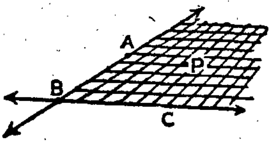
(b) ஒரு சம பக்க முக்கோணத்தில் மையக் கோடுகள் (குத்துக் கோடுகள், கோணங்களின் இரு சம வெட்டிகள்) ——— வழியே செல்லும்.

XI. பரப்பளவு

§1. படத்தில் C என்னும் புள்ளி A-க்கும், B-க்கும் இடையே உள்ளது. இதனை A-C-B என்று குறிப்பிடுகிறோம். A-C-B யானால் B-C-A என்பதும் உண்மை.

படம் 13-98.

§2. ABC ஒரு தளத்திலுள்ள கோணம் என்றால், P என்னும் ஒரு புள்ளி அதன் உட் புறத்திலுள்ளது என்பதற்கு நிபந்தனைகள்:



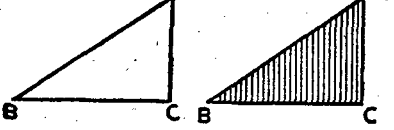
படம் 13-99.

(i) P, C, $\overleftrightarrow{AB}$-ன் ஒரே பக்கத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

(ii) P, A இவை $\overleftrightarrow{BC}$-ன் ஒரே பக்கத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

இரு அரைத் தளங்களின் (half planes) வெட்டு, குறுக்குக் கோடுகளிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

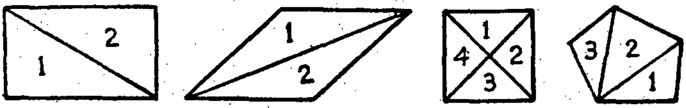
§3. $\triangle ABC$-ன் மூன்று கோணங்களில் உட்புறங்களினுடைய வெட்டுக் கணம், முக்கோணத்தின் உட்புறம் எனப்படும்.



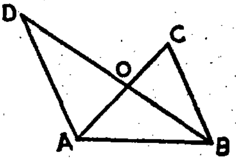
படம் 13-100.

முக்கோணம் ABC என்பதே $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ என்ற கணமல்லவா? முக்கோணம், அதன் உட்புறம் ஆகியவற்றின் சேர்ப்புக் கணத்தை முக்கோணப் பிரதேசம் (triangular region) என்போம்.

§4. இவ்வாறு முக்கோணப் பிரதேசங்களாகப் பிரிக்கப்படக் கூடிய பிரதேசங்கள் 'பல.கோணப் பிரதேசங்கள்' எனப்படும். பின் வரும் படங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு பல கோணப் பிரதேசத்தைக் குறிக்கும்.

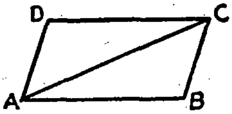


படம் 13-101.



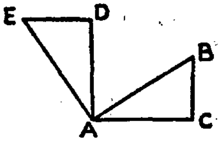
படம் 13-102.

$\triangle ABC$, $\triangle ABD$ என்ற முக்கோணப் பிரதேசங்களுக்குப் பொதுவான பிரதேசம் $\triangle AOB$ இப் படத்தில் காணப்படுகிறது.



படம் 13-103.

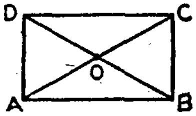
இப் படத்திலோ $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ என்ற முக்கோணப் பிரதேசங்களுக்கு AC என்ற கோடு தவிர வேறு பொதுப் பாகம் கிடையாது.



படம் 13-104.

இப் படத்தில் $\triangle ABC$, $\triangle ADE$ என்ற பிரதேசங்களுக்குப் பொதுவானது A என்னும் புள்ளி மட்டுமே.

இப் படத்தில் உள்ள பிரதேசம், $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOA$ ஆகிய நான்கு பிரதேசங்களின் சேர்ப்புக் கணம். இவற்றில் எந்த இரண்டுக்கும் O என்ற புள்ளியோ அல்லது $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ என்ற கோட்டுத் துண்டுகளில் ஒன்றோ பொது.

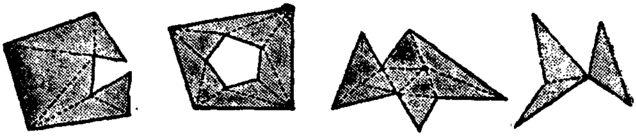


படம் 13-105

மேற்கூறிய எல்லாக் கருத்துகளையும் மனத்திற்கொண்டு "பல கோணப் பிரதேசம்" என்னும் கருத்தை வரையறுக்கவேண்டும்.

வரையறை : முடிவுற்ற (finite) எண்ணிக்கையுள்ள முக்கோணப் பிரதேசங்களில் எவ்விரண்டின் வெட்டுக் கணமும் வெற்றுக்கணமாகவோ ஒரேயொரு புள்ளியைக் கொண்டதாகவோ, அல்லது ஒரே கோட்டுத் துண்டாகவோ இருந்தால், அத்தகைய பிரதேசங்களின் சேர்ப்புக் கணத்திற்கு, பலகோணப் பிரதேசம் என்று பெயர்.

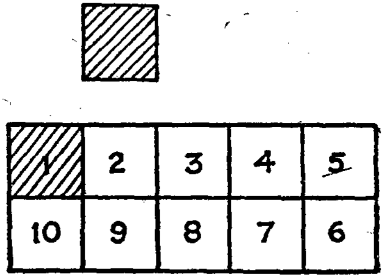
அடியில் சில பலகோணப் பிரதேசங்கள் நிழலிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளன.



படம் 13-106.

§ 5. பிரதேசங்களுக்குப் பரப்பளவு (இட அடைப்பு) என்னும் அளவு உண்டு. இதை அதே இனத்தைச் சேர்ந்த மற்றோர் அளவின் எத்தனை மடங்கு அல்லது எத்தனை பங்கு என்று சொல்வோமானாலும் திட்டமான (Standard unit) அளவைக் கொண்டு, அதன் எத்தனை மடங்கு அல்லது எத்தனை பங்கு என்று சொல்வது முறையாகும்.

1 செமீ பக்கமுள்ள ஒரு சதுரப் பிரதேசத்தின் பரப்பளவு 1 செமீ^{2}. இதை அடிப்படை அலகாக வைத்துக் கொள்ளலாம். பெரிய அளவுகளுக்கு 1 மீ^{2} என்பதைக் கொள்ளலாம்.



படம் 13-107.

இவ்வாறான பிரதேசத்தின் இட அடைப்பை, அடிப்படை அலகின் எத்தனை மடங்கு (பங்கு) என்று பார்த்து விடை கூறுகிறோம்.

§ 6. பொதுவான பிரதேசங்களின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்க சோதனை முறையில் சில உண்மைகளை மேற்கொள்ளுகிறோம். ஒரு வகையில் பார்க்குமிடத்து இந்த உண்மைகள் வெளிப்படையாகத் தோன்றுகின்றன. ஆயினும், அறிமுறையில் இத்தகைய

உண்மைகளை அடிகோள்களாகவே எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். இத்தகைய அடிகோள்களாவன :

அடிகோள் 20 : ஒவ்வொரு பலகோணப் பிரதேசத்திற்கும் இசைவாக ஒரேயொரு மிகை எண் உள்ளது.

இந்த எண்ணை அப் பிரதேசத்தின் பரப்பளவு என்போம். பிரதேசத்தை R என்று குறித்தால் அதன் பரப்பளவை $\mathcal{A}(R)$ என்று குறிப்பிடுவோம்.

அடிகோள் 21 : இரு முக்கோணங்கள் சர்வசமமாயின் அவற்றின் பரப்பளவுகளும் சமமாகும்.

இரு பலகோணப் பிரதேசங்களை சம எண்ணிக்கையுள்ள சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்க முடியுமாயின், அவ்விரு பலகோணப் பிரதேசங்களின் பரப்பளவுகள் சமமாக இருக்கவேண்டும் அல்லவா ? இதற்கோர் அடிகோள் காண்க :

அடிகோள் 22 : R என்னும் பிரதேசம் R_1, R_2 என்ற பிரதேசங்களின் சேர்ப்புக் கணம் என்க. R_1, R_2-ன் வெட்டுக்கணத்தில் முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள தனித்த புள்ளிகளும், கோட்டுத் துண்டுகளுமே இருந்தால்,

$$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R_1) + \mathcal{A}(R_2).$$

கடைசியாக, தூரங்களை அளக்கும் அலகுகளும், பரப்பளவைத் தரும் அலகுகளும் ஒத்திருப்பதற்காக மற்றோர் அடிகோள் :

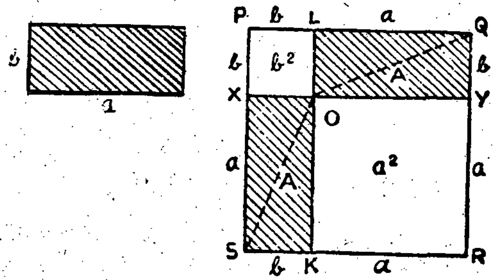
அடிகோள் 23 : சதுரப் பிரதேசத்தின் பரப்பளவு, அதன் ஒரு பக்க அளவின் வர்க்கமாகும்.

இந்த அடிகோள்களைக் கொண்டு செவ்வகம், முக்கோணம், இணைகரம், டிரபீசியம் போன்ற பிரதேசங்களின் பரப்பளவுகளைக் கணக்கிடலாம். இம் முறைகளை இனி விவரிப்போம்.

§ 7. ***தேற்றம் 35**

ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவு, அதன் ஒரு பக்கம், உயரம் ஆகியவற்றின் அளவுகளின் பெருக்கற் பலனாகும்.

நிருபணம் : கொடுத்துள்ள செவ்வகத்தின் பக்க அளவு *a*, உயர அளவு *b*, பரப்பளவு *A* என்க. $(a+b)$ அளவு பக்கமுள்ள ஒரு சதுரம் வரைந்து, படத்தில் காட்டியபடி அதனை இரு



படம் 13-108.

சதுரங்கள், இரு செவ்வகங்களாகப் பிரிக்க இச் செவ்வகங்கள் ஒவ்வொன்றும் கொடுத்துள்ள செவ்வகத்திற்குச் சர்வசமமாக இருக்கும். இப் பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு $(a+b)^2$. ஆனால் இப் பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு அடிகோள் 22-ன் படி,

$$= \measuredangle(PLOX) + \measuredangle(LQYO) + \measuredangle(OYRK) + \measuredangle(XOKS)$$

$$= b^2 + A + a^2 + A$$

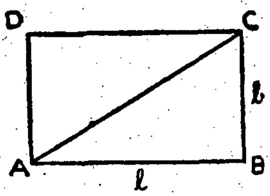
$$= 2A + a^2 + b^2$$

$$\therefore (a+b)^2 = 2A + a^2 + b^2$$

$$\therefore a^2 + 2ab + b^2 = 2A + a^2 + b^2$$

$$\therefore 2ab = 2A.$$

$$\therefore A = ab.$$

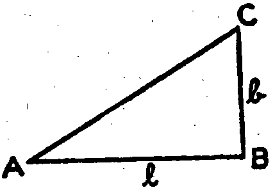


படம் 13-109

ABCD ஒரு செவ்வகம். $\overline{AC}$ ஒரு மூலை விட்டம். இங்கு $\Delta\ ABC \cong \Delta\ ADC$. (இதை நிரூபிக்கவும்). ஆகையால் $\Delta\ ABC$ என்னும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவு செவ்வகம் *ABCD*-ன் பரப்பளவில் பாதி.

அதாவது $\frac{1}{2}\ lb$.

இங்கு △ *ABC* ஒரு செங்கோண முக்கோணம். செங்கோணத்தை உள் அமை கோணமாகக் கொண்ட பக்க அளவுகள் *l*, *b* என்ற எண்களால் குறிக்கப்படுகின்றன. ஆகவே △ *ABC*-ன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}lb$ என்று அறிக.



இவ்விதம் நாம் நிரூபித்தது பின் வருமாறு :

படம் 13-110

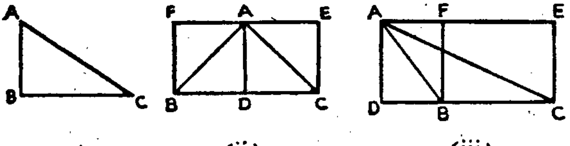
தேற்றம் 36

ஒரு செங்கோண முக்கோணப் பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காட்டும் எண், அதன் இரு பக்கங்களின் அளவு எண்களின் பெருக்கற் பலனில் பாதியாகும்.

இனி *ABC* எனும் முக்கோணப் பிரதேசத்தின் பரப்பளவை *ABC* என்றும், *ABCD* என்ற நாற்கரப் பிரதேசத்தின் பரப்பளவை *ABCD* என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

*தேற்றம் 37

ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு அதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளம், அப் பக்கத்திற்கு எதிர் உச்சியிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டுத் துண்டின் நீளம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனில் பாதியாகும்.



படம் 13-111.

எடுகோள் : △ *ABC*-ல் $\overline{BC}$ ஒரு பக்கம் ; $\overline{AD}$ அதற்கியைந்த உயரம்.

நிரூபிக்க : △ *ABC* பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}BC \times AD$.

நிரூபணம் : படம் (i)-ல் $m\angle B = 90$.

$\therefore \quad D = B.$

முக்கோணப் பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}BC\cdot AD$.

படம் (ii)-ல் $B\text{-}D\text{-}C$, படம் (iii)-ல் $D\text{-}B\text{-}C$.

இவ்விரு படங்களிலும், $\overline{CE} \perp \overline{BC}$, $\overline{BF} \perp \overline{BC}$, $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{BC}$.

(1) $BCEF$, $BDAF$, $CDAE$ இவை செவ்வகங்கள்.

(2) ΔACD-ன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}DC\cdot AD$ (தேற்றம் 36)

(3) ΔABD-ன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}BD\cdot AD$ (தேற்றம் 36)

(4) படம் (ii)-ல்

$ABC = ACD + ABD$ (அடிகோள்)

$= \frac{1}{2}BD \times AD + \frac{1}{2}DC \times AD$

$= \frac{1}{2}AD \times (BD + DC)$

$= \frac{1}{2}AD \times BC = \frac{1}{2}BC\cdot AD$.

படம் (iii)-ல்

$ACD = ABC + ABD$ (அடிகோள்)

$\therefore\ ABC = ACD - ABD$.

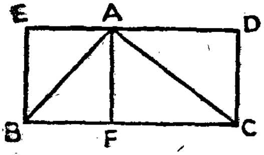
$= \frac{1}{2}DC \times AD - \frac{1}{2}BD\cdot AD$ (தேற்றம் 36)

$= \frac{1}{2}AD\ (DC - BD)$

$= \frac{1}{2}AD \times BC = \frac{1}{2}BC \times AD$.

கிளைத்தேற்றம் 1

ஒரு முக்கோணமும் ஒரு செவ்வகமும், ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் (அல்லது சம அளவு அடிப் பக்கங்கள் மீதும்) ஒரே செங்குத்து உயர அளவிலும் அமைந்தால் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு செவ்வகத்தின் பரப்பளவில் பாதி ஆகும்.



படம் 13-112.

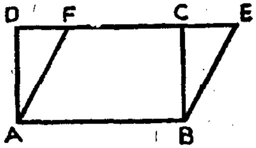
[குறிப்பு : $BCDE = BC\cdot CD$

$ABC = \frac{1}{2}BC\cdot AF$

$CD = AF$]

கிளைத்தேற்றம் 2

ஒரே அடிப்பக்க அளவும், ஒரே உயர அளவும் கொண்ட செவ்வகம், இணைகரம், இவற்றின் பரப்பளவுகள் சமம்.



படம் 13-113.

[குறிப்பு : △ ADF, △ BCE சர்வசமம் என்று நிரூபிக்க. ABCF என்னும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவை இவ்விரு முக்கோணங்களின் பரப்பளவோடு கூட்டுக.]

கிளைத்தேற்றம் 3

ஒரு முக்கோணமும் ஓர் இணைகரமும் ஒரே (அல்லது சம அளவு) அடிப்பக்கமும், சம அளவு உயரமும் கொண்டவையானல் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு இணைகரத்தின் பரப்பளவில் பாதி ஆகும்.

[குறிப்பு : கிளைத்தேற்றங்கள் 1, 2 ஐப் பயன்படுத்தவும்.]

பயிற்சி 13·16

(1) ஒரு சதுரத்தின் பக்க அளவு a. அதன் பரப்பளவு என்ன ?

(2) ஓர் இணைகரத்தின் அடிப்பக்க அளவு l, உயரம் h. அதன் பரப்பளவு என்ன? விடைக்கு ஆதாரமான தேற்றம் என்ன ?

(3) பின்வரும் வடிவங்களின் பரப்பளவுகளைக் கணக்கிடுக.

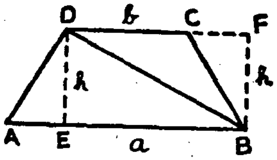
(i) *ஒரு சதுரத்தின் பக்க அளவு 1 டெசிமீ. (டெமீ^{2}, செமீ^{2}, மிமீ^{2}-ல் கூறுக.)*

(ii) *ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப் பககம் 1 மீட்டர், உயரம் 4 டெசிமீ.*

(iii) *இணைகரத்தின் அடிப்பக்கம் 5 டெசிமீ 4 செமீ, உயரம் 2 டெசிமீ.*

(4) (i) ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவு 1 மீ². அதன் அகல அளவு 50 செமீ. நீள அளவு என்ன ?

(ii) ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவு 20 ; அதன் அடிப் பக்க அளவு 8. உயர அளவு என்ன ?

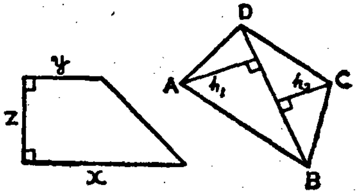


படம் 13-114.

(5) *ABCD* ஒரு டிரபீசியம். $\overline{DE}$, $\overline{BF}$ முறையே Δ *ABD*, Δ *BCD*-ன் உயரங்கள். டிரபீசியத்தின் பரப்பளவைக் காண உதவும் சூத்திரம் என்ன? (படிப்படியாக வழி எழுதிக் காட்டுக).

(6) ஒரு சாய் சதுரத்தின் பரப்பளவைக் காண உதவும் சூத்திரம் என்ன :

(7) படங்களில் குறிக்கப்பட்ட எண்களைக் கொண்டு பிரதேசங்களின் பரப்பளவுகளைக் காண உதவும் சூத்திரங்களைப் படிப்படியாக எழுதிக் காட்டுக.



படம் 13-115.

(8) நிரூபிக்க :

(i) சம உயரமுள்ள இரு செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகள் அவற்றின் அடிப்பக்க அளவுகளின் விகிதத்தில் இருக்கும்.

(ii) சம உயரமுள்ள இரு முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் அவற்றின் அடிப்பக்க அளவுகளின் விகிதத்தில் இருக்கும்.

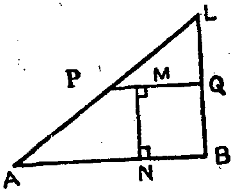
(iii) சம அடிப்பக்க அளவுகள் கொண்டுள்ள இரு முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் அவற்றின் உயரங்களின் விகிதத்தில் இருக்கும்.

(9) *ABCD* என்பது ஓர் இணைகரம். *E* என்பது $\overline{BC}$-ன் மையப் புள்ளி. *ADE* = *ABC* என்று காட்டுக.

(10) ஒரு முக்கோணத்தின் மையக் கோடு ஒவ்வொன்றும் அதன் பிரதேசத்தை இரு சம பரப்புள்ள பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது என்று காட்டுக.

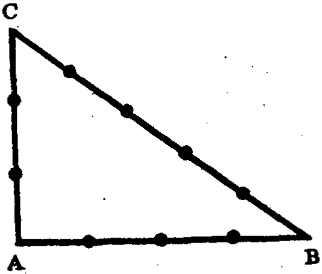
(11) ABC ஒரு முக்கோணம். D, E, F, முறையே $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$-ன்மையப்புள்ளிகள்.
$DEF = \frac{1}{4} ABC$ என்று காட்டுக.

(12) படத்தில் $AB = 8$, $PQ = 6$ $MN = 3$ எனில், $APQB$, PQB, APB ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.



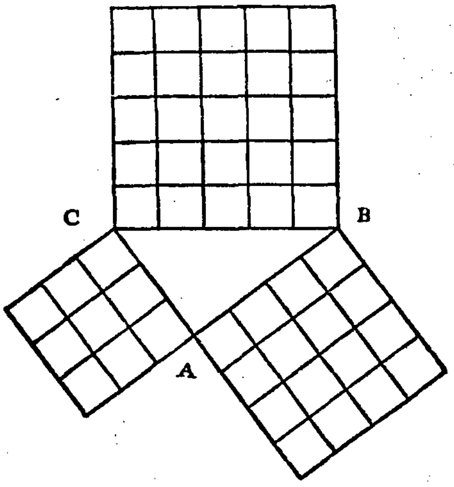
படம் 13-116.

§ 8. 3, 4, 5 அலகுகள் கொண்ட கோட்டுத் துண்டுகளைப் பக்கங்களாக வைத்து ஒரு முக்கோணம் வரைந்தால் அது செங்கோண முக்கோணம் ஆகும் என்பது மிகப் பழையகாலம் தொட்டே மக்களுக்குத் தெரிந்திருந்தது. கி. மு. 6ஆம் நூற்றுண்டில் பிதாகரஸ் என்ற கணித மேதையும் அவரது மாணுக்கர்களும் அறிமுறை அடிப் படையில் பல வடிவியல் தேற்றங்களை நிரூபித்தனர். அவற்றில் ஒன்று நாம் இப்போது அறியப்போகும் **பிதாகரசின் தேற்றம்** ஆகும்.



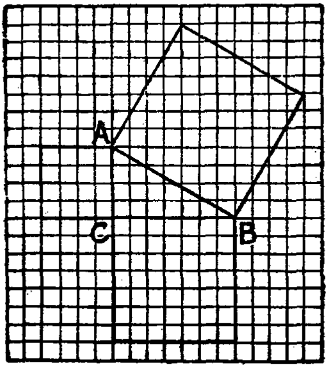
படம் 13-117.

§9. ABC என்ற செங்கோண முக்கோணம் படத்தில் காட்டியது போல் வரைந்து AB, BC, CA-ன் மேல் சதுரங்கள் வரைக. AB, BC, CAஐ 3, 4, 5 அலகுகளாக வகுத்து, படத்தில் காட்டியது போல், சதுரங்கள் வரைந்து, அவற்றின் பரப்பளவுகளைச் சதுர அலகில் காட்டும் எண்களைக் கணக்கிடு. இம் மூன்று எண்களுக்கும் என்ன தொடர்பு காணப்படுகிறது ?



படம் 13-118.

(3) கட்டக் காகிதத்தில் *ABC* என்ற ஏதாவது ஒரு செங்கோண முக்கோணம் வரைக. *AB*, *AC*, *BC*-ன் மேல் சதுரங்கள் வரைக. கட்டங்களை எண்ணி ஒவ்வொரு சதுரத்தின் பரப்பளவுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும். இம் மூன்று எண்களுக்கிடையே என்ன தொடர்பு காணப்படுகிறது?



படம் 13-119.

(4) 2, 3 கணக்குகளின் செய்முறையிலிருந்து மூன்று சதுரங்களின் பரப்பளவுகளுக்கிடையே நெருங்கிய தொடர்பு ஒன்று இருப்பது புலப்படும். அது பின் வருமாறு :

"கர்ணத்தின் மேல் வரையப்பட்ட சதுரத்தின் பரப்பளவு மற்ற இரு பக்கங்களின் மேல் வரையப்பட்ட சதுரங்களின், பரப்பளவுகளின் மொத்தத்திற்குச் சமம்."

இந்த உண்மையை அறிமுறை நிறுவல் அடிப்படையில் நாம் கீழே காண்போம்.

தேற்றம் 38

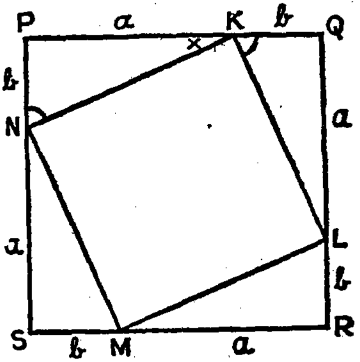
(பிதாகரசின் தேற்றம்)

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் மேல் வரையப்பட்ட சதுரத்தின் பரப்பளவு, மற்ற இரு பக்கங்களின் மேல் வரையப்பட்ட சதுரங்களின் மொத்தப் பரப்பளவுக்குச் சமம்.

எடுகோள் : செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் அளவு c, மற்ற இரு பக்கங்களின் அளவுகள் a, b என்க.

நிரூபிக்க : $c^2 = a^2 + b^2$

நிரூபணம்: $(a+b)$ பக்க அளவுள்ள $PQRS$ என்ற சதுரம் வரைக. $\overline{PQ}$-ல் K என்ற புள்ளியை $PK = a$, $KQ = b$ என்றபடி எடுத்துக் கொள்க. இவ்வாறே $QL=a$, $LR = b$; $RM = a$, $MS = b$; $SN = a$, $NP = b$ என்றிருக்குமாறு L, M, N என்ற புள்ளிகளை முறையே $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$ மீது எடுத்துக் கொள்க.



படம் 13-120.

ப-கோ-ப அடிகோளின்படி PKN, QLK, MRL, NSM ஆகிய முக்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் கொடுத்துள்ள முக்கோணத்திற்குச் சர்வசமம். எனவே,

$$KL = LM = MN = NK = c \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

மேலும், $m\angle NKL = 180 - (m\angle PKN + m\angle QKL)$

$= 180 - (m\angle PKN + m\angle PNK)$

$= 180 - 90 = 90.$

இவ்வாறே நாற்கரம் $KLMN$-ன் ஒவ்வொரு கோணமும் ஒரு செங்கோணம் என நிரூபிக்கலாம். ... ... (2)

(1), (2)-லிருந்து $KLMN$ ஒரு சதுரம் என்றறிகிறோம். அடிகோள் 22-ன்படி,

$$PQRS = PKN + QLK + MRL + NSM + KLMN$$

$$(a+b)^2 = \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$\therefore \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

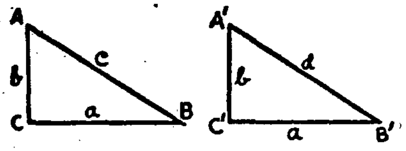
தேற்றம் 39

ஒரு முக்கோணத்தில் மிகப் பெரிய பக்கத்தின்மேல் வரையப்பட்ட சதுரத்தின் பரப்பளவு, மற்ற இரு பக்கங்களின் மேல் வரையப்பட்ட சதுரங்களின் பரப்பளவின் மொத்தத்திற்குச் சமமானுல் அம் முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.

எடுகோள் : ABC என்ற முக்கோணத்தில் $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $c^2 = a^2 + b^2$.

நிரூபிக்க : ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

நிரூபணம் : a, b என்பவற்றை செங்கோணத்தின் புய அளவுகளாகக் கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணம் $A'B'C'$ என்க. இதன் கர்ணம் d எனில்



படம் 13-121.

$$a^2 + b^2 = d^2$$

(பிதாகரசு தேற்றம்)

ஆனால்,

$a^2 + b^2 = c^2$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad c = d.$

ப-ப-ப- அடிகோளின் படி $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$

எனவே, $m\angle C = m\angle C' = 90$

$\therefore \quad ABC$ ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

ஒரு முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணமா என்றறிய இத் தேற்றம் மிகவும் பயன்படும். எடுத்துக்காட்டாக, பக்கங்களின் அளவுகள் 5, 12, 13 கொண்ட முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணமா என்று ஆராய

$$13^2 = 5^2 + 12^2$$

என்பது சரியா என்று பார்க்க வேண்டும். இது சரியானதாதலால் இம் முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணம் தான் என்று அறிகிறோம்.

பயிற்சி 13·17

(1) ABC என்ற முக்கோணத்தில் $\angle C$ செங்கோணம்.

(i) $AC = 10 \quad BC = 7$ எனில் $AB = ?$

(ii) $AC = 6, \quad BC = 5$ எனில் $AB = ?$

(iii) $AB = 15, \quad BC = 6$ எனில் $AC = ?$

(iv) $AB = 25, \quad AC = 9$ எனில் $BC = ?$

(2) பின் வரும் அளவுகள் கொண்ட முக்கோணங்களில் எவை செங்கோண முக்கோணங்கள், எவை இல்லை ? ஏன் ?

(i)	5, 7, 8	(ii)	9, 12, 15
(iii)	10, 6, 5	(iv)	12, 5, 10
(v)	1, 5, 5	(vi)	8, 15, 17
(vii)	$\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{7}$	(viii)	$\sqrt{83}, 7, \sqrt{34}$.

(3) பக்க அளவுகள் a, b, c ($\angle B$ செங்கோணம்) என்றால் a^2, b^2, c^2 இவைகட்குள்ள சம்பந்தம் என்ன ?

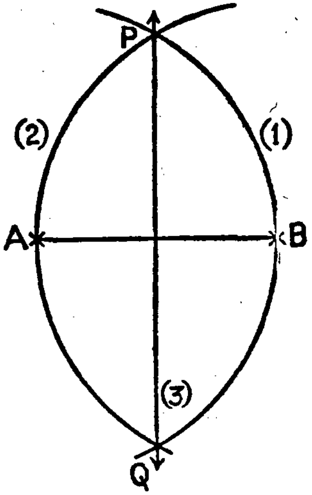
XII. செய்முறை வடிவியல்
(Applied Geometry)

§ 1. ஒரு கோட்டுத் துண்டிற்கு மையக் குத்துக் கோடு வரைதல்

வரை முறை : $\overline{AB}$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோட்டுத் துண்டு.

(1) A ஐ மையமாகவும், AB ஐ ஆரமாகவும் உடைய வட்டம் வரை.

(2) B ஐ மையமாகவும், ABஐ ஆரமாகவும் உடைய வட்டம் வரை, இருவட்டத் தேற்றப்படி, இவ்விரு வட்டங்களும் P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.



படம் 13-122.

(3) $\overleftrightarrow{PQ}$ வை வரை.

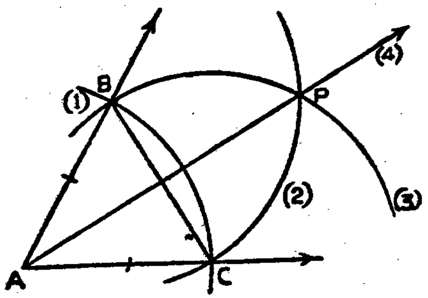
$\overleftrightarrow{PQ}$, $\overline{AB}$-ன் மையக்குத்துக் கோடாகும்

நிருபணம் :

விவரணம்		காரணம்
(1)	$AP = BP$	அமைப்பு
(2)	P, $\overline{AB}$-ன் மையக் குத்துக் கோட்டில் அமையும்.	நியமப்பாதைத் தேற்றம்
(3)	$AQ = BQ$	அமைப்பு
(4)	Q, $\overline{AB}$-ன் மையக் குத்துக் கோட்டில் அமையும்.	நியமப்பாதைத் தேற்றம்
(5)	$\overleftrightarrow{PQ}$, $\overline{AB}$-ன் மையக்குத்துக் கோடு.	இரு புள்ளிகள் ஒரு கோட்டை நிர்ணயிக்கின்றன.

[குறிப்பு : வட்டங்களின் ஆரங்கள் $\frac{1}{2}AB$-க்கு அதிகமாக எடுத்துக் கொள்வதால், P, Q என்ற புள்ளிகள் $\overline{AB}$-க்கு இரு புறங்களிலும் அமையும். (தேற்றம் 12)]

§ 2. கொடுக்கப்பட்ட கோணத்தை இரு சமக் கூறிடல்



படம் 13-123.

வரைமுறை :

$\angle A$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோணம்.

(1) A ஐ மையமாகக் கொண்டு $\angle A$-ன் பக்கங்களை, B, C என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுமாறு ஒரு வட்டம் வரைக.

(2) B ஐ மையமாகவும் BC ஐ ஆரமாகவும் (அல்லது $\frac{1}{2}BC$-க்கு அதிகமான நீளத்தை ஆரமாகவும்) கொண்டு ஒரு வட்டம் வரை.

(3) C ஐ மையமாகவும், அதே ஆரமுள்ளதாகவும் உள்ள மற்றொரு வட்டம் வரை. இரு வட்டத் தேற்றப்படி (அல்லது 12ஆவது தேற்றப்படி) இவ்விரு வட்டங்களும் $\overleftrightarrow{BC}$-க்கு எதிர்ப் புறங்களிலுள்ள இரு புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்ளும். $\overleftrightarrow{BC}$-க்கு A புள்ளி அமைந்த புறத்திலிருந்து எதிர்ப்புறத்தில் அமையுமாறு, இவ்விரு வட்டங்களும் P என்ற புள்ளியில் வெட்டி கொள்ளட்டும்.

(4) $\overrightarrow{AP}$ ஐ வரை. $\overrightarrow{AP}$, $\angle A$-ன் இரு சமவெட்டி.

நிரூபணம் :

விவரணம்		காரணம்
(1)	$AB = AC$	அமைப்பு
(2)	$PB = PC$	அமைப்பு
(3)	$AP = AP$	மீட்புப் பண்பு
(4)	$\triangle ABP \equiv \triangle ACP$	ப-ப-ப
(5)	$\angle BAP \equiv \angle CAP$	சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள்.
(6)	$\therefore$ $\overrightarrow{AP}$, $\angle A$-ன் இரு சம வெட்டி	

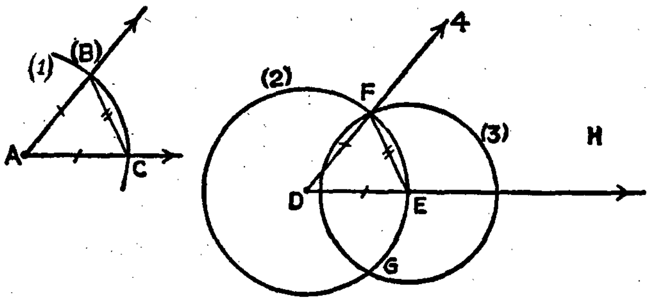
§3. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோணத்தை, கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு கதிரின் குறிப்பிட்ட பக்கத்தில் அமைத்தல்

$\angle A$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் D ஐ முடிவுப் புள்ளியாகக் கொண்ட கதிரும், அக் கதிரை விளிம்பாகக் கொண்ட H என்ற அரைத் தளமும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வரைமுறை :

(1) $\angle A$-ன் பக்கங்களை, B, C என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டு மாறு, A ஐ மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரை.

(2) கொடுக்கப்பட்டுள்ள கதிரை 'E' என்ற புள்ளியில் வெட்டுமாறு, D ஐ மையமாகவும், $AB = AC$ ஐ ஆரமாகவு முடைய ஒரு வட்டம் வரை.



படம் 13-124.

(3) E ஐ மையமாகவும், BC ஐ ஆரமாகவுமுடைய மற்றொரு வட்டம் வரை.

இவ் விரு வட்டங்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கதிரின் எதிர்ப் புறங்களில் அமையும் F, G என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளும் (தேற்றம் 12).

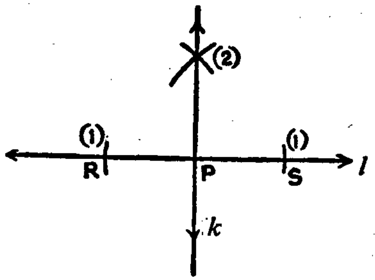
இவ்விரு புள்ளிகளில், F என்னும் புள்ளி H என்ற அரை தளத்தில் அமையட்டும். $\angle EDF$, $\angle CAB$-க்கு சர்வசமமான கோணமாகும்.

நிரூபணம் :

விவரணம்	காரணம்
(1) $AC = DE$	அமைப்பு
(2) $AB = DF$	அமைப்பு
(3) $CB = EF$	அமைப்பு
(4) $\triangle BAC \equiv \triangle FDE$	ப-ப-ப
(5) $\angle BAC \equiv \angle FDE$	சர்வசம முக்கோணத்தின் ஒத்த கோணங்கள்.

4. ஒரு குறிப்பிட்ட கோட்டிற்கு, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழியாகக் குத்துக்கோடு வரைதல்

(a) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி, குறிப்பிட்ட கோட்டில் அமையும் பொழுது :



படம் 13-125.

l கொடுக்கப்பட்ட கோடு. P, l-ல் அமையும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி.

வரைமுறை :

(1) P ஐ மையமாகக் கொண்டு, l ஐ, R, S என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுமாறு ஒரு வட்டம் வரை.

(2) $\overline{RS}$-ன் மையக் குத்துக் கோட்டை வரை. k என்பது, மையக் குத்துக் கோடானால், k என்பது, P வழியாக, l-க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடாகும்.

நிரூபணம் :

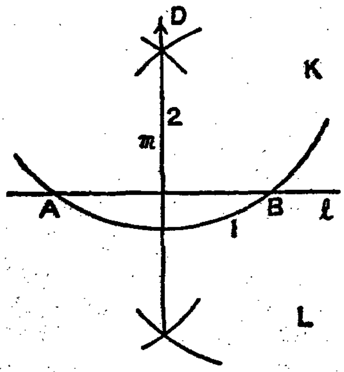
விவரணம்	காரணம்
(1) $PR = PS$	அமைப்பு
(2) k, RS-ன் மையக் குத்துக் கோடு	அமைப்பு
(3) k, P-ன் வழியாகச் செல்லும் குத்துக்கோடு	1, 2 படிகளில் கூறியபடி (நியமப்பாதை தேற்றம்)
(4) $\therefore$ k, l-ன் குத்துக் கோடாகும்	

(b) கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி, குறிப்பிட்ட கோட்டின் வெளிப்புறத்தில் அமையும் பொழுது :

l என்பது கொடுக்கப்பட்ட கோடு. அதன்மீது அமையாத *D* என்ற புள்ளி கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. *D* வழியாக *l*-க்கு குத்தாக ஒரு கோடு வரைய வேண்டும்.

வரைமுறை :

l-ன் ஒரு புறத்தில், *l* ஐ விளிம்பாகக் கொண்ட *K* என்ற அரைத் தளமும், மறு புறத்தில் *L* என்ற அரைத் தளமும் அமைந்துள்ளன. *D* என்ற புள்ளி *K* என்ற அரைத் தளத்தில் அமைந்துள்ளது.



படம் 13-126.

(1) *D* ஐ மையமாகக் கொண்டு தகுந்த ஆரமுடைய வட்டத்தின் விற்கள், *l* ஐ *A*, *B* என்ற தனித்த புள்ளிகளில் வெட்டுமாறு வரை.

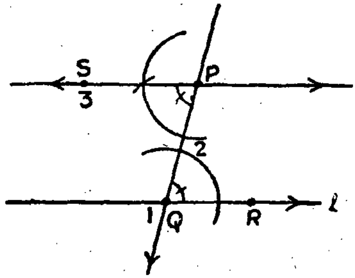
(2) *AB*-க்கு மையக் குத்துக் கோடு *m* வரை. இம் மையக் குத்துக் கோடே, *D* வழியாக *l*-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக் கோடாகும்.

நிரூபணம் :

விவரணம்	காரணம்
(1) $AD = BD$	வரைதல்
(2) m, $\overline{AB}$-ன் மையக் குத்துக் கோடு	வரைதல்
(3) D, m-ல் அமையும்	1ஆம் படி (நியமப் பாதைத் தேற்றம்)
(4) m, D வழியாக l-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக் கோடு	2, 3ஆம் படி

§5. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோட்டிற்கு, வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளி வழியாக ஓர் இணை கோடு வரைதல்

l என்ற கோடும், அதில் அமையாத P என்ற புள்ளியும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 13-127.

வரைமுறை :

l-ல், Q, R என்ற இரு புள்ளிகளைக் குறி.

(1) $\overleftrightarrow{PQ}$-வை வரை.

(2) வரைமுறை 3-ல் கூறியவாறு, $\angle QPS$ ஐ $\angle PQR$-க்குச் சர்வ சமமாக இருக்குமாறும், S, R என்ற புள்ளிகள் $\overleftrightarrow{PQ}$-விற்கு எதிர்ப்புறத்தில் அமையுமாறும் வரை. $\overleftrightarrow{PS}$-ம், $\overleftrightarrow{QR}$-ம் இணை கோடுகளாகும்.

அதாவது $\overleftrightarrow{PS}$, கொடுக்கப்பட்டுள்ள l என்னும் கோட்டிற்கு இணை கோடாகும்.

நிரூபணம் :

விவரணம்	காரணம்
(1) $\angle QPS \equiv \angle PQR$	வரைதல்
(2) $\overleftrightarrow{PS} \parallel \overleftrightarrow{QR}$	உட்பக்க ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சர்வ சமம் — தேற்றம் 20
(3) $\overleftrightarrow{PS} \parallel l$	$l \equiv \overleftrightarrow{QR}$

பயிற்சி 13·18

(1) $\overline{AB} \cong 5 \cdot 7$ செமீ. $\overline{AB}$-ன் மையக் குத்துக் கோடு வரை. அக் கோடு $\overline{AB}$ ஐ C-ல் வெட்டினால், $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ இவற்றை அளந்தெழுதுக.

(2) ஏதேனும் (a) ஒரு குறுங்கோணம் (b) ஒரு விரிகோணம் வரைந்து அதை இரு சமக் கூறிடு. ஒவ்வொரு கோணத்தையும் அளந்தெழுது.

(3) ABC என்ற ஒரு முக்கோணம் வரை. $\overleftrightarrow{PQ}$ என்ற கோட்டில் P, Q என்ற புள்ளிகளை முறையே உச்சிகளாகக் கொண்டு, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QP}$ என்ற கதிர்களைப் புயமாகவும், அவற்றின் ஒரே புறத்தில் அமையுமாறும், முறையே $\angle A$, $\angle B$-க்குச் சர்வ சமமான கோணங்களை வரை. P, Q-ல் அமையும் கோணங்களின் மற்றப் பக்கங்கள் R-ல் வெட்டினால், $\angle PRQ$-வை அளந்தெழுது. $\triangle ABC$ நிர்ணயிக்கும் கோணங்களும், முறையே $\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$-ம் சர்வ சமமானவைகள் என்று நிரூபி.

(4) ABC என்ற முக்கோணத்தை வரைந்து, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ன் மையக் குத்துக் கோடுகளை வரை. இம் மையக்குத்துக் கோடுகள் எவ்வளவு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன? அப் புள்ளி (களு)க்கும் A, B, C, என்ற புள்ளிகளுக்கும் இடையிலுள்ள தூரத்தை அளந்தெழுது. (மூன்று மையக் குத்துக்கோடுகளும் ஒரே புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும். இப்புள்ளி, A, B, C என்ற புள்ளிகளுக்கு சம தூரத்தில் இருக்கிறது என்று நிரூபி). (தேற்றம் 32)

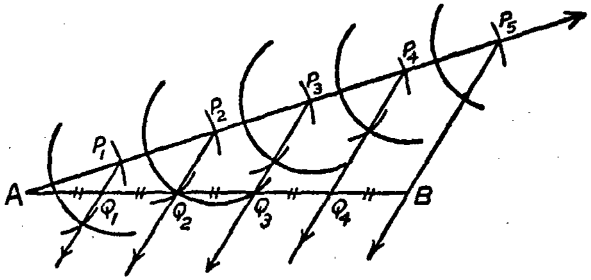
(5) ABC என்ற முக்கோணத்தை வரைந்து, $\angle B$, $\angle C$ இவற்றை இரு சமக் கூறிடு. இவ்விரு சம வெட்டிகள் சந்திக்குமிடம் I என்று கொள். I-லிருந்து $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, இவற்றிற்குக் குத்துக் கோடுகள் வரை. இக் குத்துக் கோடுகள் $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$-க்களை K, L, M-ல் வெட்டுமானால் IK, IL, IM இவை சமம் என்று நிரூபி. (தேற்றம் 33)

(6) ABC என்ற முக்கோணத்தை வரைந்து, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{AB}$ இவற்றிற்கு முறையே A, B, C வழியாக குத்துக் கோடுகள் வரை. இக் குத்துக் கோடுகள் ஒன்றையொன்று எத்தனை புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன?

§6. கொடுத்துள்ள கோட்டுத் துண்டைக் குறிப்பிட்ட சர்வசம பாகங்களாகப் பிரித்தல்

$\overline{AB}$ என்பது கொடுத்துள்ள கோட்டுத் துண்டு.

AB ஐ 'n' சர்வசம பாகங்களாகப் பிரிக்கவேண்டும். (படத்தில், n-ன் மதிப்பு 5 என எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது.)



படம் 13-128.

வரைமுறை :

(1) A வழியாக $\overleftrightarrow{AB}$ மீது அமையாத ஒரு கதிரை வரை.

(2) இந்தக் கதிரில், $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$ என்ற சர்வசம கோட்டுத் துண்டுகளை அமை. (இக் கோட்டுத் துண்டுகளின் நீளங்கள் எப்படியிருந்தாலும், கோட்டுத் துண்டுகள் சர்வசமமானவைகளாக இருந்தால் போதும்.

(3) $\overrightarrow{P_nB}$ ஐ அமை.

(4) P_1, P_2, P_3, ..., P_{n-1} என்ற மற்றப் புள்ளிகள் வழியாக $\overleftrightarrow{P_nB}$-க்கு இணை கோடுகள் வரை. இவ்விணை கோடுகள் $\overline{AB}$ ஐ, Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_{n-1}-ல் வெட்டட்டும்

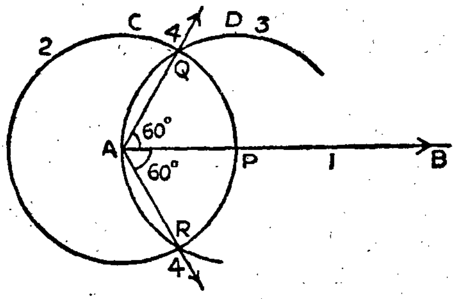
இப்பொழுது, Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n என்ற புள்ளிகள் $\overline{AB}$ ஐ n சர்வ சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன.

$$AQ_1 = \frac{1}{n}AB$$

நிருபணம் :

விவரணம்	காரணம்
$AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \dots = P_{n-1}P_n$	வரைதல்
$\overleftrightarrow{P_1Q_1} \parallel \overleftrightarrow{P_2Q_2} \parallel \overleftrightarrow{P_3Q_3} \dots \parallel P_nB$	,,
$AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = \dots = Q_{n-1}B$	தேற்றம் 27

§7 (a). கோண அளவு (டிகிரியில்) 60 இருக்கும்படி ஒரு கோணம் வரைதல்



படம் 13-129.

வரைமுறை :

(1) $\overrightarrow{AB}$ ஐ வரை.

(2) A ஐ மையமாகக் கொண்ட ஏதேனும் ஒரு வட்டம் C. $\overrightarrow{AB}$ ஐ P-ல் வெட்டட்டும்.

(3) P ஐ மையமாகவும், அதே ஆரமுடையதாகவுமுடைய D என்னும் வட்டம் வரை. வட்டம் D, வட்டம் C ஐ Q, R என்னும், $\overrightarrow{AB}$-க்கு எதிர்ப் புறங்களிலுள்ள இரு புள்ளிகளில் வெட்டும் (தேற்றம் 12).

(4) $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AR}$ இவற்றை அமை.

$$m\angle PAQ = m\angle PAR = 60.$$

நிரூபணம் :

விவரணம்	காரணம்
(1) $AP = AQ = PQ$	வரைதல்
(2) ΔAPQ சமபக்க முக்கோணம்	1ஆம் படி
(3) $m\angle PAQ = 60$	சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம்
(4) $m\angle PAR = 60$	சமபக்க ΔARP-ன் ஒரு கோணம்

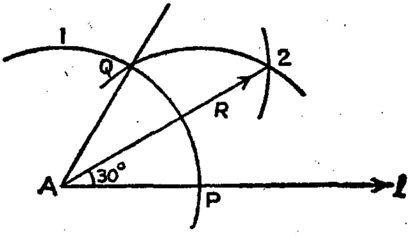
§ 7 (b). கோண அளவு (டிகிரியில்) 30 இருக்கும்படி ஒரு கோணத்தை அமைத்தல்

வரைமுறை :

(1) 7 (a)-ல் கூறிய படி $m\angle QAP = 60$ இருக்குமாறு வரை.

(2) $\angle QAP$ ஐ இரு சமக் கூறிடு.

$\angle QAP$-ன் இரு சம வெட்டி $\overrightarrow{AR}$ ஆக இருக்கட்டும்.



படம் 13-130.

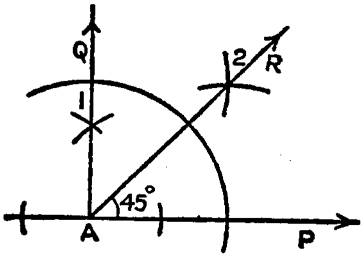
இப்பொழுது $m\angle RAP = m\angle RAQ = \frac{60}{2} = 30$.

நிரூபணம் :

விவரணம்	காரணம்
(1) $m\angle QAP = 60$	வரைதல்
(2) $\angle RAP \cong \angle RAQ$	$\overrightarrow{AR}$, $\angle QAP$-ன் இரு சமவெட்டி
(3) $m\angle RAP \cong m\angle RAQ = 30$	1, 2 படிகளில் கூறியபடி

§ 7 (c). கோண அளவு (டிகிரியில்) 45 இருக்கும்படி ஒரு கோணத்தை அமைத்தல் :

வரைமுறை :



படம் 13-131.

(1) $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்குமாறு வரை. $m\angle QAP = 90$.

(2) $\angle QAP$ ஐ இரு சமக் கூறிடு.

$\angle QAP$-ன் இருசம வெட்டி $\overrightarrow{AR}$ ஆக இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது $m\angle RAP = m\angle RAQ = \frac{90}{2} = 45$.

நிரூபணம் : 7 (b)-ல் உள்ளது போல் எழுதவும்.

பயிற்சி 13·19

(1) $\overleftrightarrow{AB}$ என்ற கோட்டை வரைந்து, $\overleftrightarrow{AB}$-ன் எதிர்ப்புறங்களில் அமையுமாறு *P*, *Q* என்ற புள்ளிகளைக் குறித்துக்கொண்டு, அவை வழியே செல்லுமாறு $\overleftrightarrow{AB}$-க்கு இணை கோடுகள் வரை.

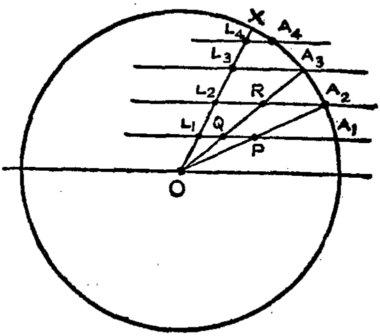
(2) $\overleftrightarrow{AB}$-க்கு 5 செ.மீ தூரத்திலுள்ள *P* எனும் புள்ளி வழியாக $\overleftrightarrow{AB}$-க்கு ஓர் இணை கோடு வரை. ($\overleftrightarrow{AB}$-க்கு குத்துக் கோடு வரைந்து, அக் கோடு $\overleftrightarrow{AB}$ ஐ வெட்டுமிடத்திலிருந்து, 5 செமீ தூரத்தில் அக் குத்துக் கோட்டிலேயே *P* என்ற புள்ளியை குறித்துக் கொள்.)

(3) $\overrightarrow{AB}$ ஐ வரைந்து, $m\angle CAB = 60$ (டிகிரியில்) இருக்குமாறு வரை. $m\angle CBA = 30$ இருக்குமாறு, மற்றொரு கோணம் வரை. கோணம் *ACB* ஐ அளந்து காண்.

(4) $m\angle A = m\angle B = 45$ இருக்குமாறு *ABC* என்ற முக்கோணத்தை வரை. $\angle C$ ஐ அளந்து பார்.

§8. கொடுத்துள்ள கோட்டுத் துண்டின் நீளத்தில் $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... பங்கு நீளமுள்ள கோட்டுத் துண்டுகளை வரைதல்

வரைமுறை : கொடுத்துள்ள நீளத்துக்குச் சமமான ஆர அளவுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. இதன் மையப் புள்ளி O என்க. இதன் ஓர் ஆரத்தில், L_1, L_2, L_3, ... என்ற வெவ்வேறு புள்ளிகளை, $OL_1 = L_1L_2 = L_2L_3 = ...$ என்றவாறு எடுத்துக் கொள்க. (இதற்கு, OL_1 தகுந்த அளவு சிறியதாக இருக்கவேண்டும்). L_1, L_2, L_3, ... வழியாக இணைகோடுகள் வரை. இவை வட்டத்தை முறையே A_1, A_2, A_3, ... என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். A_1, A_2, A_3, ... வழியே ஆரங்களை வரைக.



படம் 13-132.

$\overline{OA_2}$, $\overline{OA_3}$, ... என்ற ஆரங்கள் இணை கோடுகளால் முறையே இரண்டு, மூன்று, ... சமபாகங்களாக ஆக்கப்பட்டிருக்கும். படத்தில் $\overline{OX}$-ன் நீளத்தில் பாதி நீளமுள்ள கோட்டுத்துண்டு $\overline{OP}$

$\frac{1}{3}$ நீளமுள்ள கோட்டுத்துண்டு $\overline{OQ}$

$\frac{2}{3}$ நீளமுள்ள கோட்டுத்துண்டு $\overline{OR}$.

14. வரைபடங்கள்

பகுதி—I

§ 1. (1) வரைபடங்களில் ஒரு வகை 'சார்பு வரைபடம்' (Functional graph) எனப்படும்.

இரண்டு மாறிகளைக் கொண்ட திறந்த வாக்கியங்களை எடுத்துக்காட்டாகக் கொண்டு, ஒரு மாறி மற்றொன்றை எவ்வாறு சார்ந்திருக்கிறது என்பதை விளக்கும் படங்களை வரையக் கற்றுக் கொண்டீர்கள்.

வரைபடம் வரைதலில் முக்கியமாகக் கவனிக்கப்பட வேண்டிய சில அம்சங்கள் :

(i) வரைபடத் தாளில் மெய்யெண் தளம் ஒன்று அமைத்தல்.

(ii) கிடை அச்சு, நிலே அச்சு (x-axis, y-axis) இவற்றை ஆதாரமாகக் கொண்டு, சௌகரியமான அளவுத் திட்டம் தேர்ந்தெடுத்து, அச்சுகளே அளவு கோடிடுதல்.

(iii) புள்ளிகளேக் குறித்தல்.

(iv) வரைபடம் வரைதல்.

வரைபடம் வரைந்துவிட்டால் மாத்திரம் போதாது. அதிலிருந்து என்னென்ன விவரங்களேச் சேகரிக்கலாம், அதை விளக்கி எவ்வாறு பொருள் கொள்ளலாம் என்றறியும் வகையில் வரைபடங்களேப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

(2) வரைபட முறையில், இரு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடி ஒருங்கமை சமன்பாடுகளேத் தீர்த்தலே, அதாவது, அவற்றின் தீர்வுக் கணம் என்ன என்று கண்டுபிடிப்பதை இங்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்குவோம். அத்தகைய சமன்பாடுகள், தீர்க்கக் கூடியவைகளாக இருத்தல் அவசியம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

தீர்வு காண் :

$x + y = 8$; மேலும், $x - y = 2$.

x-ன் பிரதியீட்டுக்கணம் $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

y-ன் பிரதியீட்டுக்கணம் $\{1, 2, 3, 4\}$ எனக் கொள்க.

பிரதியீட்டு கணம், பெருக்கல் கணம் என்ற அடிப்படையில் இத்தகைய திறந்த வாக்கிய சோடிகள் 'அல்லது', 'மேலும்' என்ற முறையில் இணேக்கப்பட்டிருந்தால், எவ்வாறு தீர்வு கணம் காண்பது என்று முன்னமேயே விளக்கப்பட்டது.

இங்கு மற்றொரு முறையைப் பார்ப்போம்.

கொடுக்கப்பட்டவை இரு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடி ஒருங்கமை சமன்பாடுகள். இவற்றின் சார்பு வரைபடம் கோடுகள் என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். ஒருதளத்தில் கோடு தீர்மானிக்கப்பட, இரு புள்ளிகள் போதும், இரு புள்ளிகள் தேவை.

பிரதியீட்டு கணம் x, y என்ற ஒவ்வொரு மாறிக்கும் N எனக் கொள்க. பெருக்கல் கணம் அமைத்து, அதிலிருந்து முதல் சமன்பாட்டை மெய்யாக்கும் உறுப்புகளில் இரண்டையும்,

அவ்வாறே இரண்டாவதை மெய்யாக்கும் உறுப்புகளில் இரண்டையும் கீழே காட்டியதுபோல் அட்டவணையிட்டு நிறுவிக் கொள்வோம்.

$x+y=8$
பிரதியீட்டுக்கணம் N

x	1	6
y	7	2

$x-y=2$
பிரதியீட்டுக்கணம் N

x	3	6
y	1	4

[குறிப்பு 1 : அட்டவணையை, பெருக்கல் கணம் தயாரித்து அதிலிருந்து நிரப்புவதற்குப் பதிலாக, பின்வருமாறு செய்யலாம். இது எளிதாயும், சீக்கிரமாயும் முடியும். பிரதியீட்டுக்கணம் I, Q என்றிருந்தால், இம் முறை எளிது என்பதை நீங்களே அறிந்து கொள்ளலாம்.

முதல் சமன்பாடு	இரண்டாவது சமன்பாடு
$x+y=8$ $\Rightarrow y=8-x$	$x-y=2$ $\Rightarrow -y=2-x$ $\Rightarrow y=x-2$
(அட்டவணை: x: 1, 6; y: 7, 2)	(அட்டவணை: x: 3, 6; y: 1, 4)
x-க்கு 1, 6 என்பவை தம் விருப்பம்போல் பிரதியீட்டுக் கணத்திலிருந்து எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டவை. $y=8-x$ என்ற நிபந்தனையிலிருந்து பிறகு y-ன் மதிப்பு கண்டுபிடிக்கப் படுகிறது.	x-க்கு 3, 1 என்று விருப்பம் போல் பிரதியீட்டுக் கணத்திலிருந்து வைத்துக் கொண்டு $y=x-2$ என்பதிலிருந்து y-ன் மதிப்பு கண்டுபிடிக்கப் படுகிறது.

x	1	6
y	7	2

x	3	6
y	1	4

குறிப்பு 2 பிரதியீட்டுக்கணத்தைப் பொறுத்து (*W. I. Q*) ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் மெய்யாக்கும் வரிசைப்பட்ட எண் சோடிகள் எண்ணற்றவை கிடைக்கும். அவையெல்லாம், மேலே கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையில் உள்ள வரிசை எண் சோடி இரண்டுகளால் தீர்மானிக்கப்பட்ட கோட்டிலேயே அமையும். இக் கோடு, கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனையை மெய்யாக்கும் புள்ளிகளின் நியமப்பாதை எனப்படும்.]

இனி, படிப்படியே, அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு தீர்வுக் கணம் காண்பது என்று பார்ப்போம்.

(1) அட்டவணை

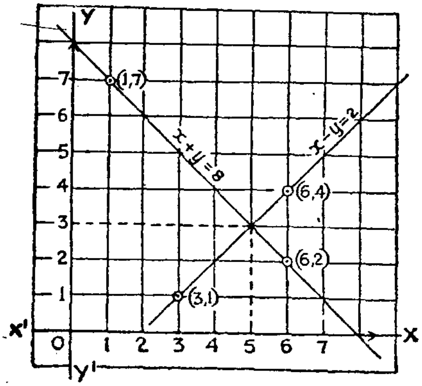
(2) x அச்சு, y அச்சு, $R \times R$ தளத்தில் வரைதல்

(3) அளவுத் திட்டம் தேர்ந்தெடுத்தல்.

(4) அச்சுகளை எண் குறியிடுதல்.

(5) இரு அட்டவணைகளிலும் கண்ட புள்ளிகளை ஒவ்வொரு சோடியாகக் குறித்து, ஒவ்வொரு சோடி புள்ளிகளைச் சேர்த்து இரு கோடுகள் வரைதல்.

(6) 'மேலும்' என்ற முறையில் இரு திறந்த வாக்கியங்களும் இணைக்கப்பட்டிருப்பதால், இரு கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியைக் குறித்து அதன் அச்சுத் தூரங்களைக் கண்டுபிடித்தல்.



படம் 14-1.

(7) 'தீர்வுக் கணம்' விடை.

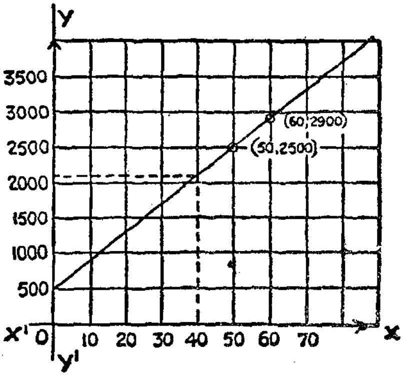
[குறிப்பு: ஒரே தளத்திலுள்ள இரு கோடுகள் வெட்டிக் கொண்டால், அவை ஒரே ஒரு புள்ளியில் தான் வெட்டிக்கொள்ளும். ஆகையால் விடை மேற் கூறியவாறு ஒருறுப்புக்கொண்ட கணம் என்று தீர்மானித்தல்.]

(8) விடையைச் சரிபார்த்தல்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

மாணவர்கள் தங்கும் ஒரு விடுதியின் செலவில் ஒரு பகுதி மாருதது; மற்ருேர் பகுதி தங்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்தது. 50 மாணவர்கள் இருந்தால் செலவு மொத்தம் ரூ. 2,500. 60 பேர் இருந்தால் செலவு மொத்தம் ரூ. 2,900 என்ருல், மாருத பகுதிச் செலவு என்ன? 40 மாணவர்கள் இருக்கும் போது செலவுத் தொகை மொத்தம் என்ன?

இவ்விவரங்கள் வரைபடம் 14-2-ல் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. பின் வரும் குறிப்பைக்கொண்டு, அவற்றைப் புரிந்து கொள்ளவும்.



படம் 14-2.

[குறிப்பு: (1) இங்கு மாறிகள் என்ன? (2) எவ்விதத் தொடர்பைக் குறிக்கவேண்டும்? (3) பிரதியீட்டுக் கணம் என்ன? (4) சௌகரியமான அளவுத் திட்டம் என்ன? (5) குறிக்கப்படவேண்டிய இரு புள்ளிகள் என்ன? (6) 'ஆதி' புள்ளியின் வழியே வரைபடம் செல்கிறதா? இல்லையாஞல் ஏன்? (7) மாருத பகுதிச் செலவு எவ்வாறு காண்பது? (8) 40 மாணவர்கள் இருக்கும்போது செலவு எவ்வாறு காண்பது?]

பயிற்சி 14·1

(1) தீர்வுக் கணம் காண்க:

(i) $x + y = 11$; மேலும், $2x + y = 15$

(ii) $2x + y = 16$; மேலும், $x - 2y = 2$

(iii) $4x + 7y = 11$; மேலும், $3x + 5y = 8$.

(2) (i) புத்தகங்கள் அச்சடிப்பதில் செலவின் ஒரு பகுதி மாருதது, மற்ருேர் பகுதி பிரதிகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்தது. 5,000 பிரதிகளுக்குச் செலவுத் தொகை மொத்தம் ரூ. 13,000; 3,000 பிரதிகளுக்கு ரூ. 9,000 என்ருல், நிரந்தரப் பகுதிச் செலவு என்ன? 4,000 பிரதிகள் அச்சடிக்க மொத்தத் தொகை என்ன?

(ii) புகைப்படம் எடுக்கும் செலவில் ஒரு பகுதி மாறுதது ; மற்றேர் பகுதி, தேவையான பிரதிகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்தது. 30 பிரதிகளுக்கு மொத்தத் தொகை ரூ. 150 ; 40 பிரதிகளுக்கு ரூ. 190 என்றால், மாறுத பகுதிச் செலவு என்ன ? ஒரு பிரதிக்குச் செலவு என்ன ? 50 பிரதிகளுக்கு மொத்தத் தொகை என்ன ?

பகுதி—II

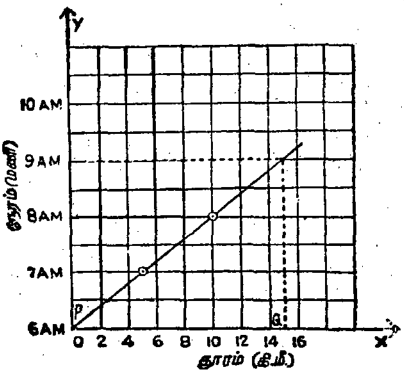
§ 2. இங்கு மற்றேர் வகைக் கணக்குகளுக்கு, வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்பதை ஆராய்வோம். இவை "காலமும், தூரமும், வேகமும்" என்னும் வகையைச் சார்ந்தவை.

தூரம் d (கிமீ), காலம் t (மணி), வேகம் s (மணிக்கு கி மீட்டரில்) என்றால், $d = st$ என்ற சூத்திரம் கிடைக்கும்.

குறிப்பிட்ட வேகம் மணிக்கு 60 கிமீ என்றால், 2, 3, 4, ... மணி அளவில் முறையே 120, 180, 240, ... கிமீ தூரம் செல்லலாம் என்று இந்த நிபந்தனையை விரித்துக்கொள்ளலாம். அல்லது $\frac{1}{2}$ மணியில் 30 கிமீ, $\frac{1}{4}$ மணியில் 15 கிமீ என்றும் கொள்ளலாம். இவ்வாறுன அடிப்படைக் கருத்தைக் கொண்டு, பின்வரும் இரு கணக்குகளையும், வரைபட முறையையும் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

P, Q என்ற என்ற இரு இடங்களுக்கு இடைத் தூரம் 15 கிமீ. நான் மணிக்கு 5 கிமீ வேகத்தில் காலை 6 மணிக்கு P-லிருந்து கிளம்பி Q-க்கு நடந்தால், வேகம் மாறுமலிருக்கும்போது நான் Q ஐ எப்பொழுது அடைவேன் ?



படம் 14-3.

இங்குத் தொடர்புப் படுத்தப்படவேண்டிய மாறிகள் நேரம், தூரம். இவற்றின் மாறுதல் நேர்விகித சம்பந்தமுள்ளது. ஆகவே, வரைபடம் கோடு ஆகும். தூரத்தை x அச்சிலும், நேரத்தை y அச்சிலும் குறி.

குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகளின் விவரம் (i) (தூரம் 0 கிமீ, மணி 6), (தூரம் 5 கிமீ, மணி 7), (தூரம் 10 கிமீ, மணி 8), ...

கோட்டுப் படம் கிடைக்கும். அதற்கு இரு புள்ளிகள் போதும். (மூன்று புள்ளிகள் ஏன் ?)

இம் மூன்று புள்ளிகளையும் குறித்து வரையும் கோடு (கொடுக்கப்பட்ட வேகத்தின் அடிப்படையில்) தூரத்திற்கும் நேரத்திற்கும் உள்ள தொடர்பைக் காட்டுகிறது.

15 கிமீ செல்லும்போது என்ன நேரம் என்பது எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது என்பதைக் கவனிக்கவும்.

[குறிப்பு :

(1) $d = st$, $y = mx$, ... இவை போன்றவை, நேர்விகித மாறுதலைக் காட்டும் வாக்கியங்கள். எழுத்துகளுக்கு, வேண்டியபடி எண் மதிப்புகள் கொடுத்து, தேவையான விடை கண்டு பிடிக்கலாம்.

வரைபடம் மூலமாகவும் $d = st$ என்பது எவ்வாறு விளக்கம் பெறுகிறது என்பதையும் காட்டினோம். ஆகையால் சூத்திரங்கள் போல், கணித வாக்கியங்கள் போல், வரைபடங்களும், நேர் விகித மாறுதல், எதிர்விகித மாறுதல் போன்ற கருத்துகளை விளக்க மிக உதவியான மாதிரி (Model) களாகக் கருதலாம்.]

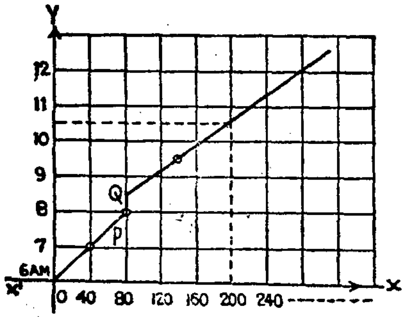
எடுத்துக்காட்டு 2 :

A, *B* என்பவை 200 கிமீ. இடைத் தூரமுள்ள இரு இரயில் நிலையங்கள். ஓர் இரயில் *A* ஐ விட்டு 6 மணிக்குக் கிளம்பி, 2 மணி நேரம், மணிக்கு 40 கிமீ வேகத்தில் சென்றது. பிறகு $\frac{1}{2}$ மணி தங்கி, அதன் பின்னர் மணிக்கு 60 கிமீ வேகத்தில் அதன் பயணத்தைத் தொடர்ந்து சென்றது. அது *B*-க்கு எப்பொழுது வந்து சேரும் ?

அடுத்தபக்கத்தில் வரையப்பட்டுள்ள வரைபடத்தைக் கவனி (படம் 14-4). அது மூன்று பகுதிகளாக அமைந்திருக்கிறது, இஃது எவ்வாறு என்று விளக்குவோம்.

(1) (0 கிமீ, 6 மணி), (40 கிமீ, 7 மணி), (80 கிமீ, 8 மணி) இம் மூன்று புள்ளிகளையும் சேர்க்கப்பட்ட பகுதி *AP*.

(2) 8 மணியிலிருந்து 8-30 வரை வண்டி ஓடவில்லை. ஆகவே தூரம் 8-30-க்கும் அதே 80 கிமீ. ஆகையால் இப் புள்ளி *Q* ஐக் குறித்து, அதை *P*-யுடன் சேர். *PQ* என்னும் இப் பகுதி நேரத்தைக் காட்டும் *y*-அச்சு வாக்கில் ஏறியிருக்கிறது. ஆனால், தூரத்தைக் காட்டும் *x*-அச்சு வாக்கில் வளரவில்லை என்பதைக் கவனி. இது வரைபடத்தின் இரண்டாம் பகுதி.



படம் 14-4.

(3) 8-30-க்கு அங்கிருந்து கிளம்பிய வண்டி, 9-30-க்கு அவ்விடத்திலிருந்து 60 கிமீ. தூரத்திலிருக்கும். அதற்குமேல் அதே வேகத்தில் தொடர்ந்து போவதால், வரைபடம் எவ்வாறு அமையவேண்டும்? (80 கிமீ, $8\frac{1}{2}$ மணி) யுடன் (140 கிமீ, $9\frac{1}{2}$ மணி) என்ற புள்ளிகளைக் குறித்துச் சேர்த்து அக் கோட்டை வரை. இது வரைபடத்தின் மூன்ருவது பகுதி.

(4) 200 கி மீட்டரை எப்பொழுது அடைகிறது என்று எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது?

பயிற்சி 14·2

(1) மணிக்கு 4 கிமீ. வேகத்தில் ஒருவர் நடக்கிருர். அவர் 1, 2, 3, ... மணிகளில் இவ்வாறு செல்லும் தூரத்தைக் காட்டும் வரைபடம் வரைக.

(2) ஓர் இரயில் மாலை 7 மணிக்குக் கிளம்பி, மணிக்கு சராசரி 50 கிமீ. வேகத்தில் நிற்காமல் ஓடுகிறது. இந்த வேகத்தில் காலம்—தூரம் இவற்றைச் சார்ந்த வரைபடம் வரை. 200 கி மீட்டருக்கு அப்பாலுள்ள இடத்தை அது எப்பொழுது சேரும்?

(3) *P*, *Q* என்பவை 45 கிமீ. இடைத் தூரமுள்ள இரு இடங்கள். நான் காலை 7 மணிக்கு *P*-லிருந்து கிளம்பி மணிக்கு 10 கிமீ வேகத்தில் *Q* ஐ நோக்கி சைகிளில் செல்கிறேன். அதே சமயம் *Q*-லிருந்து என் நண்பர் கிளம்பி, மணிக்கு 15 கிமீ வேகத்தில் *P* ஐ நோக்கிச் சைகிளில் வருகிருர். இருவரும் எங்கு, எப்பொழுது சந்திப்போம்?

(4) ஒரு நாள் நான் என் வீட்டிலிருந்து 20 கிமீ தூரத்திலுள்ள என் கிராமத்திற்குச் செல்ல வேண்டி இருந்தது. காலை 6 மணிக்குக் கிளம்பி மணிக்கு 5 கிமீ வேகத்தில் 2 மணி நடந்தேன். பிறகு அங்கு 1 மணி தங்கினேன். அங்கிருந்து பின்னர் மணிக்கு 4 கிமீ வேகத்தில் மீதி தூரத்தை நடந்தேன். நான் கிராமத்தை எப்பொழுது வந்தடைந்தேன்? 11-30-க்கு நான் கிளம்பிய இடத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திலிருந்தேன்?

(5) ஓர் இரயில் வண்டி இரவு 9 மணிக்குச் சென்னையை விட்டுப் புறப்பட்டது. மணிக்கு 60 கிமீ வேகத்தில் 2 மணி ஓடியது. பிறகு ஒரு சிறிய விபத்தால் 1 மணி தாமதித்து, அதன் பின்னர் மணிக்கு 50 கிமீ வேகத்தில் ஓடியது. அது எப்பொழுது (200 கிமீ தூரத்திலுள்ள) கடலூரை அடைந்தது?

பகுதி—III

§3. நொடியீட்டுக் கணிப்பிகள் (Ready Reckoners)

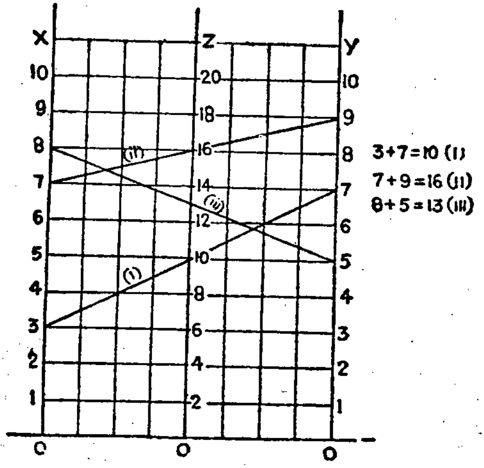
(1) வங்கிகளில் பணம் போடுபவர்களுடைய கணக்குப் புத்தகங்களில், வட்டி பதிய அட்டவணைகள் வைத்திருப்பதை நீங்கள் பார்த்திருக்கலாம். 'பவுண்டு' நிறையை 'கிலோ கிராம்', அல்லது 'கிலோகிராமை' 'பவுண்டு' ஆக மாற்ற, இவ்வாறு சம்பந்தப்பட்ட சோடி ராசிகளை ஒன்றுக்கொன்று மாற்ற, அட்டவணைகள் இருக்கின்றன. இவ்வாறான வேறு அட்டவணைகள் எடுத்துக்காட்டாக உங்களால் கொடுக்க முடியுமா? இப் புத்தகத்திலேயே, பல அட்டவணைகள் இருக்கின்றன. இவையெல்லாம் **நொடியீட்டுக் கணிப்பிகள்** எனப்படும்.

(2) முழு எண்களின் கூட்டல் பற்றிய வாய்பாடுகளை அமைக்க, கீழ் வகுப்புகளில் கற்றுக்கொண்டீர்கள். இத்தகைய எண்களின் கூட்டல் விடைகளை, ஒரு புது முறையில் பட மூலமாக இங்குக் காண்போம். இத்தகைய படங்கள் **நேம வரையங்கள் (Nomograms)** என்று வழங்கப்படும்.

சிறிய எண்களையே எடுத்துக்காட்டாக இங்குக் கொள்வோம். இத்தகைய சாதனம் ஒன்று நீங்கள் தயாரித்து அதைக் கொண்டு சிறிய ஓரிலக்க முழு எண்கள் கூட்டல் கணக்குகளைச் செய்து, நீங்களும் மகிழ்வுறலாம். மேலும், சிறுவர்களுக்குக் கணிதத்தில் சிறந்த உற்சாகமும், ஊக்கமும் அளிக்கத்தூண்டும் ஓர் எளிய

சாதனமாகும் என்பதற்காக இதை இங்குக் குறிப்பிடுகிறோம். மேல் வகுப்புகளில் இத்தகைய மற்ற சாதனங்களைப்பற்றி மேலும் அறியலாம்.

அமைப்பு: X, Y என்ற அடையாளமிட்ட நிலைகோடுகளில் 1 அலகு 1 எண்; Z என்று அடையாளமிட்ட நிலைக் கோட்டில் 1 அலகு 2 எண் என்ற அளவில் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன.



படம் 14-5.

பயன்படுத்தும் முறை: கூட்ட வேண்டிய எண்களை X, Y கோடுகளில் எடுத்துக்கொண்டு சேர்த்து (அல்லது ஒரு நேர் சட்டத்தைப் பயன்படுத்தி), அக் கோடு, Z என்னும் நிலை கோட்டை எந்த எண்ணின் வழியே கடக்கிறது என்று பார். அதுவே, அக் கூட்டலின் விடையாகும்.

[**குறிப்பு:** இதை, கூட்டலுக்கு ஒரு நொடியிட்டுக் கணக்கு சாதனமாகப் பயன்படுத்தலாம்.]

(3) இதே சாதனத்தை எவ்வாறு கழித்தலுக்குப் பயன்படுத்தலாம் என்று ஊகிக்க முடியுமா ?

a-லிருந்து b ஐக் கழித்தல் ($a > b$; $a, b \in W$) என்பது, W-ல் c என்ற ஓர் எண்ணை $a = b + c$ தருமாறு கண்டுபிடிப்பதாகுமல்லவா ? இக் கருத்தை மனத்திற் கொண்டு, $12 - 4$ என்ற கழித்தல் கணக்கின் விடையை இச் சாதனத்திலிருந்து காண்போம்.

12 ஐ Z என்ற கோட்டில் எடுத்துக்கொள். 4 ஐ X என்ற கோட்டில் எடுத்துக்கொள். இவற்றைச் சேர்க்கும்படி நேர் சட்டம் ஒன்றை வைத்து, அது Y கோட்டில் எந்த எண் வழியே செல்கிறது என்று பார்.

பயிற்சி 14·3

(1) படத்தில் காட்டிய சாதனத்தைக் கொண்டு விடை காண் :

(i) $5 + 5$ (ii) $7 + 8$ (iii) $3 + 9$
(iv) $5 - 2$ (v) $8 - 1$ (vi) $12 - 3$
(vii) $17 - 8$.

(2) X, Y, Z என்ற நிலைக்கோடுகளை பூச்சியத்தைக் குறிக்கும் இடைக் கோட்டிற்குக் கீழே நீட்டி, அப் பாகங்களில் தகுந்தபடி எண்களை (குறை எண்களை)க் குறித்து, பிறகு விடை காண்க :

(i) $(-2)+(-2)$ (ii) $(+7)+(-6)$
(iii) $(-5+(+4)$ (iv) $(-3)+(-5)$
(v) $(+6)-(-1)$ (vi) $(-3)-(-2)$

விடைகள்

ஒரு சில கேள்விகளுக்கு மட்டுமே இங்கு விடைகள் தரப்பட்டுள்ளன. பிற கேள்விகளுக்கு விடைகளைக் காண, மாணவர்கள் ஆசிரியரின் உதவியை நாட வேண்டும்.

பயிற்சி 1·1 *(பக்கம் 5)*

(1) $\left\{ \{\ \},\ \{a\},\ \{b\},\ \{a, b\} \right\}$ (6) 8.

7.

U	A	B	C	D	E	F	G	H
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	B	A	A	B	B	A	B
C	A	A	C	A	C	A	C	C
D	A	A	A	D	A	D	D	D
E	A	B	C	A	E	B	C	E
F	A	B	A	D	B	F	D	F
G	A	A	C	D	C	D	G	G
H	A	B	C	D	E	F	G	H

∩	A	B	C	D	E	F	G	H
A	A	B	C	D	E	F	G	H
B	B	B	E	F	E	F	H	H
C	C	E	C	G	E	H	G	H
D	D	F	G	D	H	F	G	H
E	E	E	E	H	E	H	H	H
F	F	F	H	F	H	F	H	H
G	G	H	G	G	H	H	G	H
H	H	H	H	H	H	H	H	H

பயிற்சி 1·3 *(பக்கம் 12)*

(1) 27. (2) 9. (3) 9 சதவீதம். (4) $A \cap B = \phi$.

பயிற்சி 1·4 *(பக்கம் 16)*

(1) (i) $\{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$

(ii) $\{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$

(iii) $\{(a, e), (b, e), (a, f), (b, f), (a, g), (b, g)\}$.

(iv) $\{(e, a), (e, b), (f, a), (f, b), (g, a), (g, b)\}$

(v) $\{(c, e), (c, f), (c, g), (d, e), (d, f), (d, g)\}$

(vi) $\{(e, c), (f, c), (g, c), (e, d), (f, d), (g, d)\}$

(vii) 4. (viii) 4.

(3) (i) 12. (ii) 15. (iii) 20. (iv) 9. (v) 16. (vi) 25.

(6) (i) $\{(x, y, z)\}$. (ii) $\{(x, y, z)\}$ (iii) 1. (iv) 1. (v) $\{(x, z, y)\}$.

(i)-ம், (ii)-ம் சம கணங்கள். (i, v), (ii, v) இவை, சமமில்லா கணங்கள்.

பயிற்சி 1·5 (பக்கம் 19)

(2) $\{(0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8)\}$

(4) (i) $\{2, 3, 5\}$, (ii) $\{2, 3, 4, 6\}$.

பயிற்சி 3·1 (பக்கம் 36)

(1) (i) 64, (ii) 81, (iii) 3375, (iv) 625, (v) −216, (vi) 625, (vii) 1, (viii) −1, (ix) −1. (x) 1, (xi) 64, (xii) 9, (xiii) $\frac{4}{5}$, (xiv) 1.

(2) (i) 3, (ii) 1, (iii) 3^{16}, (iv) $\frac{1}{64}$, (v) 21, (vi) $\frac{12}{25}$, (vii) $\frac{5190}{8}$

(3) (i) 192, $\frac{64}{8}$, (ii) 576, $\frac{64}{9}$, (iii) 64×64 அல்லது 4096.

பயிற்சி 3·2 (பக்கம் 39)

(1) (i) $\frac{1}{8^5}$, (ii) $\frac{1}{4^a}$, (iii) $\frac{1}{a^4}$, (iv) $\frac{1}{a^b}$, (v) $\left(\frac{5}{4}\right)^3$. (vi) $\left(\frac{b}{a}\right)^5$ (vii) $\left(\frac{b}{a}\right)^m$. (viii) $\left(\frac{-1}{4}\right)^3$. (ix) $(-b)^a$.

(2) (i) 6^{-3}, (ii) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}$, (iii) $(-2)^{-5}$, (iv) a^{-4}, (v) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-b}$, (vi) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-5}$, (vii) 10^{-1}, (viii) 10^{-3}.

(3) (i) 8^7 (ii) x^{-8} அல்லது $\frac{1}{x^8}$, (iii) 7^{-6} அல்லது $\frac{1}{7^6}$, (iv) a^{-3} அல்லது $\frac{1}{a^3}$, (v) 1, (vi) x^5, (vii) x^8. (viii) 1.

பயிற்சி 3·3 (பக்கம் 41)

(1) (a) $2{\cdot}998 \times 10^{10}$ (b) $1{\cdot}3 \times 10^{9}$ (c) $1{\cdot}083 \times 10^{12}$

(d) $3{\cdot}796 \times 10^{13}$ (e) $9{\cdot}463 \times 10^{15}$

(f) $4{\cdot}2 \times 10^{-5}$ (g) $1{\cdot}6 \times 10^{-12}$

(2) (a) 537,000, (b) 2,300,000, (c) 49,700,000,
(d) 0·00033, (e) 0·00128, (f) 0·0000265.

(3) (a) $3·54 \times 10^{7}$, (b) 3×10^{8}, (c) $4·28 \times 10^{7}$,
(d) $6·5 \times 10^{-1}$, (e) 7×10^{-7}, (f) $2·8 \times 10^{-8}$.

பயிற்சி 3·4 (பக்கம் 43)

(1) (i) 5 (ii) 25 (iii) 5^{2} (iv) $\frac{2}{3}$ (v) 0·3 (vi) $\frac{5}{4}$
(vii) $a^{2}b^{3}$ (viii) 1·2.

(2) (i) 12 (ii) 7 (iii) 5 (iv) $10 \times 5^{\frac{1}{2}}$ (v) $\frac{1}{4}a$.

(3) (i) 3 (ii) 3 (iii) $\frac{5}{2}$ (iv) 0·4 (v) 10 (yi) 10.

பயிற்சி 3·5 (பக்கம் 46)

(1) (i) 4, (ii) 7·32 (iii) $\frac{1}{5}$.

பயிற்சி 3·6 (பக்கம் 50)

(1) (a) $10124_{ஐ}$, (b) $1221_{ஐ}$, (c) $10\ 111_{இ}$,
(d) $11\ 111_{இ}$.

(2) (a) $11002_{ஐ}$. (b) $1120322_{ஐ}$
(c) $1111110_{இ}$ (d) $10010011_{இ}$

(3) (a) $10000_{ஐ}$ (b) $10000_{இ}$
(c) $4442_{ஐ}$ (d) $1101_{இ}$

(4) (i)) → (ii)))) → (iii))))).

பயிற்சி 3·7 (பக்கம் 52)

(2) (a) 11, (b) 11, (c) 3, (d) 3, (e) 11, (f) 7,
(g) 7, (h)-5.

(3) (a) 6, (b) 6, (c) 7, (d) 5, (e) 4, (f) 8,
(g) 9, (h) 9.

(4) (a) ஆம் (b) அடைவு பெற்றுள்ளது (c) அடைவு பெற்றுள்ளது.

பயிற்சி 3·8 (பக்கம் 54)

(1) (a) 6, 12, 6, 12 ...

(b) 8, 4, 12, 8, 4, 12 ...

(c) 5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 12 ...

(d) 7, 2, 9, 4, 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5, 12, 7 ...

(3) (a) 3, 6, 9, 12 (b) 4, 8, 12 (c) 6, 12 ...

(4) 5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 12 ஆகிய 12 எண்கள்.

(7) (ii) (12 அடிமானத்தில்) 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1t, 1e, 20, 21, 22.

(iii) (கடிகார எண்கள்) 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 0.

பயிற்சி 3·10 (பக்கம் 57)

(1) (a) 0, 5, 3, 1, 6, 4, 2, 0, ...

(b) 0, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0

(4) (a) .., 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...

(b) ..., 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23

(c) ..., 3, 4, 5, 6, 0, 1, 2, 3.

பயிற்சி 4·1 (பக்கம் 66)

(1) 5·292, 7·938, 13·230 (2) 11·180, 4·472, 15·652. (3) 2·449, 4·898, 22·041, (4) 0·6323, 1·580852, 17·389372. (6) (i) 1, (ii) $\frac{8}{9}$, (iii) $\frac{3}{2}$.

பயிற்சி 4·2 (பக்கம் 68)

II. (1) 12 (2) 4 (3) −4 (4) $\frac{4}{3}$.

பயிற்சி 4·3 (பக்கம் 69)

(1) 4 (2) 6 (3) 3 (4) 99 (5) 10 (6) 9.

பயிற்சி 4·4 (பக்கம் 71)

II. (1) 18 (2) 3 (3) 36 (4) 30 (5) 9

பயிற்சி 4·5 (பக்கம் 73)

(1) $3\frac{1}{2}$ (2) 4·4512, 0·721, 5·1722 (3) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{8}-\sqrt{2}$, $\sqrt{8}-\sqrt{3}$.

பயிற்சி 4·7 (பக்கம் 79)

(1) (a) $\frac{1}{3}$, ·333033300333000 ...., ·33.

(b) $\sqrt{10}$, π, 3·14. (c) $\frac{-4}{5}$. $-·801$, $-\sqrt{65}$.

பயிற்சி 4·8 (பக்கம் 81)

II. (a) 12 (b) 30 (c) 2. III. (a) $x^7y^7z^{10}$.. (b) $x^{14}y^{15}z^{24}$. (c) $x^2y^3z^{18}$. IV. $x=y$.

V. (a) 729, (b) 2, (c) $\frac{1}{15}$, (d) 162, (e) $\sqrt{2}\ \pi^2$

(f) $2^5\pi^3$ அல்லது $32\pi^3$

பயிற்சி 5·1 (பக்கம் 84)

(1) (i) 24 (ii) 35 (iii) 48 (iv) 800

(2) (i) $2\frac{2}{5}$ (ii) $3\frac{4}{7}$ (iii) $7\frac{1}{2}$ (iv) $10\frac{2}{3}$.

(3) (i) 0·6 (ii) 0·15 (iii) 4·5 (iv) 4·2.

(4) (i) 165 (ii) $7a$ (iii) 405 (iv) 16^8 (v) $7x^2y$ (vi) a^2b^{-1}

(5) (i) 105 (ii) abc (iii) $a^3b^2c^3$ (iv) $a+b$ (v) $c-d$.

(6) 30 (7) 6 டெகாமீ (8) 5·46 ஹெமீ.

பயிற்சி 5·2 (பக்கம் 89)

(1) (i) 34 (ii) 41 (iii) 63 (iv) 52 (v) 96 (vi) 77 (vii) 85 (viii) 37.

(2) (i) 19 (ii) 23 (iii) 31 (iv) 29 (v) 47 (vi) 61 (vii) 73 (viii) 83 (ix) 123 (x) 234 (xi) 312 (xii) 209 (xiii) 321 (xiv) 456 (xv) 555 (xvi) 709 (xvii) 1234 (xviii) 2211 (xix) 2332 (xx) 3102 (xxi) 3405 (xxii) 4444 (xxiii) 5003 (xxiv) 6532.

(3) (i) 0·45 (ii) 0·79 (iii) 0·36 (iv) 0·82 (v) 0·25 (vi) 0·27 (vii) 0·28 (viii) 0·17 (ix) 0·4067 (சுமார்) (x) 0·521 (xi) 0·607 (xii) 0·982 (xiii) 0·315 (xiv) 0·267 (xv) 0·304 (xvi) 0·099 (xvii) 0·012 (xviii) 0·0234 (xix) 0·2005 (xx) 0·0313.

(4) (i) 2·17 (ii) 3·09 (iii) 6·51 (iv) 30·9 (v) 50·6 (சுமார்) (vi) 84·3 (சுமார்).

(5) (i) 975 (ii) 9·75 (iii) 0·0975.

(6) (i) 1·414 (ii) 1·732 (iii) 2·646 (iv) 3·606 (v) 4·123 (vi) 0·633 (vii) 0·949 (viii) 1·265 (ix) 2·530.

(7) (i) 0·447 (ii) 0·577 (iii) 0·655 (iv) 0·667.

(8) (i) 7·070 (ii) 6·928 (iii) 8·66 (iv) 6·708 (v) 8·944 (vi) 8·484 (vii) 4·472 (viii) 4·242.

(9) (i) 6 (ii) 60.

(10) 370656 ச. அலகுகள்.

பயிற்சி 5·3 (பக்கம் 95)

(1) (a) $\{0{\cdot}05,\ 5{\cdot}6,\ 41,\ 120\}$

(b) $\{{\cdot}003,\ 8{\cdot}45,\ 12{\cdot}3,\ 241\}$

(c) $\{1{\cdot}0001,\ 0{\cdot}001,\ 0{\cdot}10,\ 0{\cdot}1\}$

(d) $\{0{\cdot}0123,\ 0{\cdot}123,\ 12{\cdot}3,\ 123\}$

(2) (a) சம நுணுக்கமுடையவை. 0·0050 அதிக நுட்பமுடையது.

(b) சம நுணுக்கமுடையவை. இரண்டாவது அளவு அதிக நுட்பமுடையது.

(c) சம நுணுக்கமுடையது. நுட்பம் பற்றி ஒன்றும் கூற இயலாது. ஏனெனில், இரு அளவுகளும் இரு வேறு அலகுகளிலுள்ளன.

(d) இரண்டாவது அளவு, அதிக நுட்பம், அதிக நுணுக்கம் உடையது.

(3) ஆம். (4) இல்லை.

பயிற்சி 5·4 (பக்கம் 97)

(1) (a) 2·2 (b) 13·0 (c) 22·8 (d) 80 (e) 7·2 (f) 18.

(2) 31 மீ (3) 118 (4) இரண்டாவது ஈவு.

பயிற்சி 5·5 (பக்கம் 101)

(1) (i) 1·09 (ii) 1·09 (iii) 1·09 (iv) 1·10.

(2) (i) 0·87 (ii) 0·93 (iii) 0·93 (iv) 0·91.

(3) (i) 1·09 (ii) 1·08 (iii) 1·10 (iv) 1·08.

(4) (i) 1·06 (ii) 1·06 (iii) 1·18 (iv) 1·32 (v) 1.06.

(5) (i) 0·91 (ii) 0·92 (iii) 0·94 (iv) 0·98.

(6) (i) 0·96 (ii) 0·95 (iii) 0·99 (iv) 0·991.

பயிற்சி 6·1 (பக்கம் 109)

(1) (i) 1, 432, (ii) 24, 144 (iii) 27, 1728×27 அல்லது 46,656.

(2) (i) ஆம் (ii) இல்லை (iii) இல்லை (iv) ஆம் (v) இல்லை (vi) ஆம். (vii) ஆம்.

(3) $D(-16) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$,

$D(-25) = \{\pm 1, \pm 5, \pm 25\}$,

$D(-56) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 8, \pm 14, \pm 28, \pm 56\}$

(4) (i) 1 (ii) 4 (5) (i) 400 (ii) 112

பயிற்சி 6·2 (பக்கம் 115)

(2) இல்லை.

பயிற்சி 6·3 (பக்கம் 118)

(1) (i) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$.

(ii) $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$.

(2) மெய்.

பயிற்சி 6·4 (பக்கம் 120)

(1) (i) 5, 105 (ii) 64, 192 (iii) 16, 192 (iv) 6, 756 (v) 13, 507 (vi) 17, 204.

(2) 168 (3) 7 (4) (i) மெய் (ii) முடியாது.

பயிற்சி 6·5 (பக்கம் 123)

(1) (a) 231 (b) 5050 (c) 999 (d) 2505 (e) 100. (f) 169 (g) 105 (h) 216.

பயிற்சி 7·2 (பக்கம் 126)

(1) பி. கணம் : (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 4)}.

தீர்வுக் கணம் : {(4, 3), (5, 2), (6, 1)}.

(2) பி. கணம் : {(0, 2), (0, 3), (0, −6), (1, 2), (1, 3), (1, −6), (2, 2), (2, 3), (2, −6), (−3, 2), (−3, 3), (−3, −6)}.

தீர்வுக் கணம் : { }.

(3) பி. கணம் : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

தீர்வுக் கணம் : $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 2x - y = 1\}$

பயிற்சி 8·1 (பக்கம் 132)

(1) {(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0), (5, 2), (4, 1), (3, 0), (2, −1), (1, −2), (0, −3)}.

(2) $\{(0, 2), (1, 1\frac{1}{2})\}$.

(3) $\{(0, -3), (1, -2), (2, -1), (3, 0), (4, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$.

பயிற்சி 8·2 (பக்கம் 134)

(1) $\{(3, 2)\}$. (2) $\{(4, -1)\}$, (3) { } வெற்றுக் கணம்.

பயிற்சி 8·5 (பக்கம் 138)

தீர்வுக் கணங்கள் :

(1) $\{(4, 7)\}$ (2) $\{(6\frac{4}{5}, 2\frac{3}{5})\}$ (3) $\{(1, 1)\}$
(4) $\{(1, -1)\}$ (5) $\{(1, 5)\}$ (6) $\{(2, 2)\}$
(7) $\{(-4\frac{5}{19}, -6\frac{14}{19})\}$ (8) $\{(3\frac{3}{4}, -1)\}$.

பயிற்சி 8·6 (பக்கம் 139)

(1) 7 வயது. 11 வயது. (2) 16 வயது. 8 வயது. (3) 4 ஆண்டுகளுக்குமுன். (4) 64. (5) 15. (6) 37.

பயிற்சி 8·7 (பக்கம் 142)

(1) 15, 10. (2) 6, 9, 6. (3) 80. 50. (4) 45. (5) 30 மீ. 20 மீ. (6) 36.

பயிற்சி 8·8 (பக்கம் 144)

(1) ரூ 3. ரூ 4. (2) ரூ 1·46, 67பைசா. (3) ரூ 12. ரூ 20. (4) ரூ 1·25. ரூ 0·80. (5) ரூ 8. ரூ 7.

பயிற்சி 8·9 (பக்கம் 145)

(1) 17 (2) 26 (3) 462 (4) $\frac{6}{11}$ (5) $\frac{3}{7}$ (6) ரூ 40, ரூ 30. (7) ரூ 35,000. ரூ 5000. (8) ரூ 460. ரூ 300. (9) ரூ 500. ரூ 600. (10) ரூ 400. ரூ 450.

பயிற்சி 8·10 (பக்கம் 147)

(1) $\{(1, -1), (1, 0), (2, -1), (2, 0), (3, -1), (1, 1)\}$.

(2) $\{(1, -1), (1, -2), (1, 1), (2, -1), (2, 1)\}$.

(3) $\{(1, -2)\}$ (4) { }.

பயிற்சி 8·11 (பக்கம் 148)

(2) (i) $\{(1, 3), (3, 1), (3, 3), (5, 0), (5, 1), (5, 3)\}$.

(ii) $\{\ \}$. (iii) $\{1, 0), (1, 1), (3, 0\}$. (iv) $\{\ \}$

பயிற்சி 8·14 (பக்கம் 152)

(1) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

(2) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.

(3) $\{\ \}$.

பயிற்சி 8·15 (பக்கம் 153)

(1) ரூ 15. (2) ரூ 60. (3) ரூ 30.

பயிற்சி 9·1 (பக்கம் 156)

(2) (i) $1 \times 10^2 + 4 \times 10 + 7$

(ii) $1 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 2$.

(iii) $1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1$.

பயிற்சி 9·5 (பக்கம் 163)

(2) $-2x + 12$ (5) -13 (10) $12x^2 - 10x + 10$ (12) $9xy + 4xz + z - 4$.

பயிற்சி 9·6 (பக்கம் 165)

(1) 24, 3, 2. (2) 4 60, 44. (3) $-4, 2, -22$. (4) $3\frac{3}{4}, 6, 9\frac{3}{4}$. (5) 2, 8. (6) $9\sqrt{2} - 16, -9\sqrt{2} - 16$. (7) 8. (8) 54 (9) $-9\frac{1}{2}$. (10) $11\frac{3}{4}$. (11) -2. (12) $5 + 2\sqrt{6}$.

பயிற்சி 9·8 (பக்கம் 168)

(1) $15x+4y+10$. (2) $x+2y+9$. (3) $-x^2+7x+15$. (4) $9x^2-8xy+3$. (5) $x^2+2xy+3$. (6) 10. (7) $4x^2$. (8) 0. (9) 0. (10) $8x^4+9xy$.

பயிற்சி 9·9 (பக்கம் 170)

(1) $2x+2$. (2) $x+9$. (3) $2x^2+12x+10$. (4) $11xy-10$. (5) $5x^2+6xy+2y-1$. (6) $2x^3+x^2+3x+4$. (7) $8x^2-10x+16y-14$. (8) 0. (9) $-16x^2y+9xy+8$. (10) $2x^3+2x^2-2x+2y-2$.

பயிற்சி 9·10 (பக்கம் 172)

(1) $7x+y+7$. (2) $-2y+2$. (3) $3xy-x^2-y^2$. (4) $-8x+7y-5z+10$. (5) $9x+5y+5z$. (6) 0. (7) $-5x^2-5y^2+10$. (8) $5z$. (9) $-x+z$. (10) $3x+4y-z$. (11) $-4xy$. (12) $4xy$. (13) $4xy+4xz+4yz$. (14) $8xy-2y+2x$. (15) x^2+z^2. (16) $2x^2-y^2-z^2$. (17) $x-1$. (18) $-2x-y+1$ (19) $3x+7y+2z$. (20) 0. (21) $3x+7y+2z$. (22) $-6y$. (23) $2x-5y$ (24) $-2x-6y-2z$.

பயிற்சி 9·12 (பக்கம் 176)

(1) $2y^2+3y$. (2) a^2-3a. (3) x^3+2x^2. (4) a^4-3a^3 (5) $2b^2-7b$. (6) $-5y^3-4y^2$. (7) $a^5-a^4+a^3$ (8) $2x^5-x^4+3x^3$. (9) $3y^5-5y^3$. (10) $8x^4-10x^3$ (11) $-6x^5+14x^4-2x^2$. (12) $5a^5-5a^2$. (13) $xw+2yw-wz$. (14) $2ad-2bd+6cd$. (15) $-3ps+6qs-9rs$. (16) $4a^3-12a^2b+16ab$. (17) $-3a^2b+6ab^2-3b^3$. (18) $5a^2c-20abc-10b^2c$. (19) $10x^3y-15x^2y^2-35xy$. (20) $-3x^3y+21x^2y^2-9xy^3$ (21) $-7x^4+21x^3y-56x^2y^2$.

பயிற்சி 9·13 (பக்கம் 178)

(1) $12x^3-17x^2+12x-4$. (2) $12y^3+13y^2+6y+35$. (3) $21x^4-56x^3+108x^2-103x+60$. (4) $5x^5+9x^4+9x^3-3x^2-7x-7$. (5) $x^3+2x^2y+2xy^2+y^3$. (6) $4x^3-16x^2y+9xy^2-y^3$. (7) $8x^3-y^3$. (8) x^3+27y^3 (9) $3x^4-4x^3y-9x^2y^2+18xy^3-8y^4$. (10) $8x^3+10xy^2-20x^2+6xy+26x+4x^2y+5y^3-10y^2-8y-21$.

பயிற்சி 9·14 (பக்கம் 180)

(1) 5 (2) -1 (3) -10 (4) 0 (5) -3; 2.

பயிற்சி 9·17 (பக்கம் 186)

(1) $x+6$. (2) $x-3$. (3) $x+4$. (4) $x+6$. (5) x^2-1. (6) x^2-3x+2. (7) $2x^2+x-3$. (8) $4x^2+x-5$. (9) $y^2-4y+16$. (10) x^2+xz+z^2.

பயிற்சி 9·18 (பக்கம் 188)

(1) $2x+1$. (2) $2x-1$. (3) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$. (4) $2x+3$. (5) $12x^2+31x+60$, மீதி $-280x-240$. (6) $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$. (7) $x+y$ (8) $2x-y$.

பயிற்சி 9·19 (பக்கம் 190)

(1) ஈவு $5x^2+x-1$, மீதி $-4x+2$. (2) ஈவு x^2-3x+5, மீதி $-6x$. (3) ஈவு $2x^4+3x^3-3x^2-10x-2$, மீதி $19x+2$.

பயிற்சி 9·20 (பக்கம் 192)

(1) $4x^5-8x^4+25x^3-35x^2+33x-35$ (2) $7x^7+2x^6+14x^4-8x^3+2x^2+4x-3$. (3) $-x^5+15x^4-64x^3+61x^2-35x+4$. (4) $-3x^6+11x^5+34x^4-12x^3-2x^2+52x-20$.

பயிற்சி 9·21 (பக்கம் 193)

(1) ஈவு $x+3$, மீதி 0. (2) ஈவு $x-1$, மீதி 0. (3) ஈவு x^2-x+1, மீதி 0 (4) ஈவு $x^4-x^3+x^2-x+1$, மீதி 0. (5) ஈவு $x^4+x^3+x^2+x+1$, மீதி 0. (6) ஈவு, $5x+1$, மீதி $-x-8$. (7) ஈவு $x+6$, மீதி $4x-2$. (8) ஈவு x^2-4x-1, மீதி $16x-11$.

பயிற்சி 9·22 (பக்கம் 195)

(3) $\frac{P}{2}-l$. (6) $\frac{A}{\pi r}-r$. (9) $\frac{5}{9}(F-32)$

(10) $100-\frac{100S}{c}$. அல்லது $\frac{100(c-S)}{c}$

பயிற்சி 9·25 (பக்கம் 198)

1. (1) x^2+5x+6. (2) $x^2+8x+15$. (3) $x^2+9x+14$. (4) $x^2+10x+16$. (5) $x^2+14x+49$. (6) x^2+2x+1. (7) $4a^2-12a+9$. (8) $9p^2-12pq+4q^2$. (9) a^2-25. (10) $4x^2-1$.

II. (1) 100. (2) 400. (3) 1,600 (4) 100. (5) 100. (6) 9,996. (7) 9,99,975. (8) 9,99,831. (9) 90,000. (10) 5,50,000. (11) $8ab$. (12) $10a^2 + 12ab + 10b^2$. (13) $4a^2+10ab+4b^2$. (14) $a^2-2ab-12b^2$. (15) $-23a^2+2ab+4b^2$. (16) 25, 1. (17) k^2-4, k^2-2. (18) 28. (19) $(k^2-2)(k^2-4)$. (20) p^2+2.

பயிற்சி 9·26 (பக்கம் 200)

சுருக்குக : (1) $5x^2 + 13y^2 + 2z^2 + 16xy + 2yz + 2xz$.
(2) $4x^2+9y^2+16z^2+12xy+24yz-48xz$.

பயிற்சி 9·27 (பக்கம் 202)

(2) (a) 36, 54. (b) −36, 54 (c) 27, 9. (d) −54, 36. (3) 101. (4) 316. (5) k^3-3k. (6) $p^3 + 3p$. (7) $q^3 - 3q$. (8) $r^3 + 3r$.

பயிற்சி 9·29 (பக்கம் 207)

(1) $x^3 + 12x^2 + 44x + 48$ (2) $x^3 + 9x^2+23x+15$. (3) $x^3 - 11x^2 + 38x - 40$. (4) $x^3-7x^2 + 14x - 8$. (5) $p^3 + 6p^2 - 19p - 84$. (6) $y^3 - 2y^2 - 15y + 36$. (7) $6 - 11x + 6x^2 - x^3$. (8) $x^6 + 12x^4 + 39x^2 + 28$. (9) $a^3b^3+6a^2b^2+11ab+6$ (10) $x^3y^3-9x^2y^2+26xy-24$. (11) $a = 6$, $b = 11$, $c = 6$. (12) $k = \frac{1}{2}$, $b = 10$, $c = -\frac{3}{2}$, (13) (a) 21, 143. (b) 36, 46. (c) −15, 71. (d) −36, 46.

பயிற்சி 9·30 (பக்கம் 208)

(1) $4x^3$. (2) $x^3 + 2y^3 + z^3+3xy(x+y) + 3yz(y+z)$ அல்லது $x^3 + 2y^3 + z^3 + 3y(xy + x^2 + zy + z^2)$.

(3) $-2y^3 - 6x^2y$. (4) $4y^2$, $4xy$.

பயிற்சி 9·31 (பக்கம் 210)

(1) $\sqrt{2} - 1$. (2) $\sqrt{2} + 1$. (3) $-3(\sqrt{3} - 2)$. (4) $-5(\sqrt{3} + 2)$. (5) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. (6) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. (7) $\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$. (8) $2(\sqrt{5} + \sqrt{3})$.

பயிற்சி 9·32 (பக்கம் 212)

(1) $(x+3)(x+4)$. (2) $(x+4)(x+5)$. (3) $(x+12)(x+10)$. (4) $(x+13)(x+5)$. (5) $(x-6)(x-2)$ (6) $(x-2)(x-10)$. (7) $(x-15)(x-8)$. (8) $(x-14)(x-5)$. (9) $(x+10)(x-3)$. (10) $(x-10)(x+3)$. (11) $(x+13)(x-5)$. (12) $(x-13)(x+5)$. (13) $(x+7)(x-6)$. (14) $(x-7)(x+6)$. (15) $(x+7)(x-5)$. (16) $(x-7)(x+5)$. (17) $(a+2b)^2$. (18) $(2a+b)^2$. (19) $(2a^2+b^2)^2$. (20) $(8a^2+5b^2)^2$. (21) $(a+b)^2(a-b)^2$. (22) $(6a^2-b)^2$. (23) $(7a^2-4b^2)^2$. (24) $(3a-8b^2)^2$. (25) $-8ab$. (28) $(a^2+1)(a+1)(a-1)$. (29) $(a-b-c)(a-b+c)$. (30) $(a+b+c+d)(a+b+c-d)$.

பயிற்சி 9·32 (i) (பக்கம் 213)

(1) $(a+y)(a^2-ay+y^2)$ (2) $(x-a)(x^2+ax+a^2)$ (3) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$ (4) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$ (5) $(4a+3b)(16a^2-12ab+9b^2)$ (6) $(a+1)(a^2-a+1)$ (7) $(x-2)(x^2+2x+4)$ (8) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ (9) $(a^2+1)(a^4-a^2+1)$ (10) $(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)$

பயிற்சி 9·35 (பக்கம் 216)

(1) $x+y$, x^3+y^3 (2) $x-y$, $4(x^2-y^2)$ (3) $(b-c)$, $12(a-b)(b-c)(c-a)$ (4) $(x+2)$, $(x+2)^3(x^2-2x+4)$ (5) $(x+2)$, $(x-2)(x^2+8x+12)$ (6) b, abc (7) xyz, x^2y^2z (8) 1, $(a-b)(b-c)$ (9) $(x-12)$, $(x-12)(x+5)(x+6)$.

பயிற்சி 9·37 (பக்கம் 218)

(1) $a+2$ (2) $a-2$ (3) $a+b+c$ (4) a^2+4 (5) $a-b$ (6) $a+b$ (7) $2a-b$.

பயிற்சி 9·38 (பக்கம் 218)

(1) $(x-1)(x-2)(x-3)$ (2) $(x+1)(x-2)(x-3)$ (3) $(x-1)(x+1)(x+3)$ (4) $(x+1)(x+2)(x^2-x+1)$ (5) $(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$.

பயிற்சி 9·39 (பக்கம் 220)

(1) x^2+x+1 (2) x^2+2x+1 (அல்லது) $(x+1)^2$ (3) $2x^2-x+3$ (4) x^2+xy+y^2 (5) $2x^2-xy+3y^2$ (6) $3x^2-2x-1$ (7) $2x^2-2x-1$.

பயிற்சி 9·40 (பக்கம் 222)

(5) 17, 66 (6) 4π, 196π, $73\frac{1}{2}\pi$ (7) 9, 0

பயிற்சி 9·43 (பக்கம் 231)

(4) $a+b+c$ (5) $a^2+b^2+c^2$ (6) 0 (7) $2x^2+2y^2+2z^2$

பயிற்சி 9·44 (பக்கம் 233)

(1) 528 (2) 250 (3) 550.

பயிற்சி 10·1 (பக்கம் 237)

(1) ரூ 24·20, ரூ 39·30, ரூ 56·40, ரூ 75·50.

(2) ரூ 1070 (3) ரூ 505, ரூ 532·50 (4) ஆண்டிற்கு 12% (5) ரூ 5,780 (6) ரூ 100, ஆண்டிற்கு 9%.

பயிற்சி 10·2 (பக்கம் 240)

(1) ரூ 26·25 (2) ரூ 444·75 (3) ரூ 360·20 (4) ரூ 932·50, ரூ 12·50 (5) ரூ 1596·25, ரூ 96·25

பயிற்சி 10·3 (பக்கம் 241)

(1) ரூ 51·25 (2) ரூ 40,000 (3) ரூ 4,200 (4) ரூ 625, 8% (5) ரூ 28·10 (6) 12% (7) ரூ 8268·75 (8) 3·481 மில்லியன் (9) $11\frac{17}{28}$% (10) 5%, ரூ 4000.

பயிற்சி 10·4 (பக்கம் 244)

(1) (i) ரூ 709·26 (ii) ரூ 5922·98 (iii) ரூ 6418·82.

(2) (i) ரூ 3590·93 (ii) ரூ 3820·11 (iii) ரூ 1749·41.

(3) 17 தவணைகளுக்குப் பிறகு அல்லது $8\frac{1}{2}$ ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு.

(4) (i) ரூ 1000 (ii) ரூ 2500 (iii) ரூ 2914·00

பயிற்சி 10·5 (பக்கம் 247)

(1) ரூ 28,753·70, ரூ 20,500·99 (2) ரூ 1488·90, ரூ 679·52 (3) ரூ 4023·63, ரூ 3172·60 (4) ரூ 52,378·87 ரூ 27965·51 (5) ரூ 5374·07, ரூ 2975·50.

பயிற்சி 11·3 (பக்கம் 270)

(1) 21 (2) $1\frac{1}{8}$ (3) 15 ஆண்டுகள் 3·55 மாதங்கள் (4) 12·25 (5) 1136 (6) 65·2 (7) 1·5 (8) $36\frac{7}{16}\%$ (9) 64·8% (10) $14\frac{81}{82}\%$.

பயிற்சி 11·4 (பக்கம் 274)

(1) 3 (2) 44 (3) இ·நி.அ. 154, முகடு 155 (4) முகடு 32,36,40. இ·நி.அ. 36.

சோதனைத்தாள் (பக்கம் 275)

I. (1) 5, 25

(2) நிகழ்வுப் பல்கோணம்

(3) முகடு

(4) ஃபிஷர்.

II. (1) மெய் (2) மெய்யற்றது (3) மெய் (4) மெய்யற்றது (5) மெய்.

III. (1) வரைபடம் (2) $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$

(3) வரிசைப்படுத்தி எழுதி புள்ளி விவரத்தின் நடு மதிப்பெண்.

(4) மாணவர்களின் உயரம்.

(5) அதிக நிகழ்வெண்ணுள்ள மதிப்பெண்.

IV. பொருந்தாது: 3 ஆல், 4 ஆல், ... வகுபடும் எண்களுக்குப் பொருந்தும்.

(2) (தலை, தலை, தலை, தலை) (தலை, தலை, தலை, பூ)
(தலை, தலை, பூ, பூ) (தலை, பூ, பூ, பூ)
(பூ, பூ, பூ, பூ) (தலை, தலை, பூ, தலை)
(தலை, பூ, தலை, தலை) (பூ, தலை, தலை, தலை)
(தலை, பூ, தலை, பூ) (பூ, தலை, தலை, பூ)
(பூ, பூ, தலை, தலை)

(பூ, தலை, பூ, பூ) (பூ, பூ, தலை, பூ)
(பூ, பூ, பூ, தலை) (பூ, தலை, பூ, தலை)
(தலை, பூ, பூ, தலை)

தலைகள்	0	1	2	3	4
நி. எண்	1	4	6	4	1

முகடு 2 ; இ. நி. அ. 2

இதே போல் 5 நாணயங்களைச் சுண்டக் கிடைக்கும் விவரம் வருமாறு :

தலைகள்	0	1	2	3	4	5
நி. எண்	1	5	10	10	5	1

முகடுகள் 2, 3 ; இ. நி. அ. 2·5

(3) 3·966 மணி (சுமார்) (4) 42·40 கிகி. (5) 8·8
(6) 90·65 ; 90 (7) 90,90,89.

பயிற்சி 12·1 (பக்கம் 282)

(1) (a) $\frac{25}{4}\sqrt{3}$ சசெமீ, (b) $36\sqrt{3}$ சசெமீ,

(c) $25\sqrt{3}$ சசெமீ.

(2) $\sqrt{3}$ சசெமீ.

(3) 10 செமீ, $5\sqrt{3}$ செமீ.

(4) $\sqrt{3}\times 6$ செமீ, 12 செமீ.

பயிற்சி 12·2 (பக்கம் 283)

(1) $96\sqrt{3}$ ச செமீ. (2) 2·60 ஏர் (3) 4 செமீ.
(4) $2\sqrt{6}$ செமீ. (5) $\sqrt{6}\times 7\cdot5$ செமீ.
(6) $\frac{225\sqrt{3}}{2}$ ச செமீ.

பயிற்சி 12·3 (பக்கம் 291)

(1) (a) $14\frac{2}{3}$ செமீ, $28\frac{2}{3}$ செமீ. (b) 11 செமீ, 53 செமீ.
(c) 21 செமீ, 60 (d) 10·5 செமீ, 60
(e) 90, 50 செமீ. (f) 45, 78 செமீ.
(g) 3·5, 5·5 செமீ. (h) 3·82 மீ, 9 செமீ.

(2) 12 அலகுகள் (3) 10 அலகுகள் (4) $\frac{3}{\pi}$
(5) 15·70 செமீ, 3·14 செமீ. (6) 5 செமீ, 7·85 செமீ.
(7) 10 செமீ, 25·12 செமீ. (8) 27·2 செமீ.
(9) 27·85 செமீ. (10) 72, 62·5 செமீ, 25 $(\pi+5)$ செமீ.

பயிற்சி 12·4 (பக்கம் 297)

(1) (a) $16\frac{2}{3}\pi$ சசெமீ. (b) $65\frac{1}{3}\pi$ சசெமீ.
(c) $14\sqrt{2}$ செமீ. (d) 28 செமீ.
(e) 72, (f) 30, (g) 24 சசெமீ.
(h) 50 சசெமீ. (i) 8 செமீ. (j) 6 செமீ.
(k) 10 செமீ. (l) 10 செமீ.

(2) 19·25 சசெமீ, 19·5 செமீ. (3) 7 செமீ, 38.5 சசெமீ
(4) 56 சசெமீ. (5) 332·64 சசெமீ (6) $7\sqrt{2}$ செமீ,
18·66 செமீ, 38·46 செமீ. (7) 90 (8) 5π (9) 1 அலகு.
$57\frac{3}{11}$.

பயிற்சி 12·5 (பக்கம் 299)

(1) 30, 22½, 7½, 135, 300, 90.

(2) $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$.

(3) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 2, 3, $1\frac{1}{2}$.

சோதனைத்தாள் பகுதி 2 (பக்கம் 301)

(1) 231 சசெமீ, 60 (2) $\frac{1}{2}$ ரே. (3) 15·35 சசெமீ.
(4) 18·168 சசெமீ.

பயிற்சி 13·2 *(பக்கம் 309)*

(9) கோட்டுத்துண்டு, கதிர், கதிர் (மற்றொன்று), கோடு; இவற்றைக் குறிக்கும் படங்கள்.

பயிற்சி 13·3 *(பக்கம் 316)*

(9) *1, 2, 3* என்ற இலக்கமிட்ட கோணங்களுக்குப் பதிலாக $\angle APR$ ஐ எடுத்துக்கொள்ளலாம். (எந்த அடிகோள் இங்குப் பயன்படுகிறது?); *4, 5* இலக்கமிட்ட கோணங்களுக்குப் பதிலாக $\angle BPR$ ஐ எடுத்துக்கொள்ளலாம். இவை கோட்டுக் கோண சேர்டிகளாதலால், விடை கிடைக்கப்பெறுகிறது.

பயிற்சி 13·5 *(பக்கம் 328)*

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$ என்று (ப-கோ-ப-அடிகோளைப் பயன் படுத்தி) நிரூபிக்கவும்.

பயிற்சி 13·6 *(பக்கம் 329)*

(ii) $\triangle AOB \cong \triangle OBA$ என்று நிரூபிக்க.

(iii) $\triangle OAD \cong \triangle OBD$ என்று நிரூபிக்க.

(iv) $\triangle OAD \cong \triangle OBD$ என்று நிரூபிக்க (ஒவ்வொன்றிலும் எந்த அடிகோள் பயன்படும்?)

பயிற்சி 13·9 *(பக்கம் 348)*

(7) $m\angle A + m\angle B = 180$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$; இவ்வாறே $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ஆனதால் $m\angle D + m\angle C = 180$; ஆனால், $m\angle C = 90$, ...

பயிற்சி 13·10 *(பக்கம் 354)*

(11) *360* *(12)* *90, 72, 60, 45.*

பயிற்சி 13·12 *(பக்கம் 360)*

(1) $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ என நிரூபிக்க.

(5) $\triangle PLM \leftrightarrow \triangle QLM$-ல் ... ஆகையால் $\triangle PLM \cong \triangle QLM$..

(6) $\overline{AP} = \overline{RC}$; $\overline{AP} \parallel \overline{RC}$ (ஏன்?) ...

(7) *ABCD*-ல் $\overline{BE} \equiv \overline{ED}$ (ஏன்?), $\overline{CE} \equiv \overline{AE}$ (ஏன்?) ...

(8) $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$ (ஏன்?); $\overline{AB} \equiv \overline{CF}$ (ஏன்?), ஆகையால் ...

(9) $\overline{AL} \parallel \overline{BM}$ (ஏன்?); $\overline{AL} \equiv \overline{BM}$ (ஏன்?; ஆகையால்... இவ்வாறே *BCNM*, *ACNL*-லும் நிரூபிக்க.

பயிற்சி 13·14 (பக்கம் 364)

(2) தேற்றம் 27-ன்படி நிரூபிக்க.

பயிற்சி 13·17 (பக்கம் 384)

(2) (ii), (vi), (vii), (viii) செங்கோண முக்கோணங்கள் (ஏன்?)' (3) $b^2 = a^2 + c^2$.

SPECIMEN COPY
T.N.T.B.S - MADRAS.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

கற்க கசடற